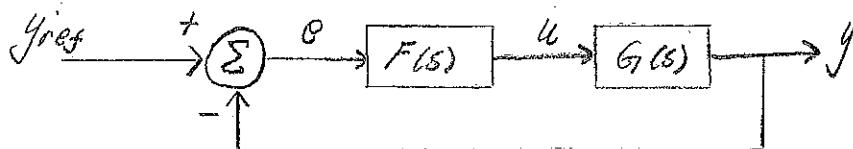


FÖRRA GÅNGEN

LEAD-LAG KOMPENSERING

DESIGNA REGULATÖR MED HJÄLP AV BODEDIAGRAM.
ALLTSÅ, KONSTRUERA $F(s)$ SÅ ATT SYSTEMET FÅR
ÖNSKADE EGENSKAPER.

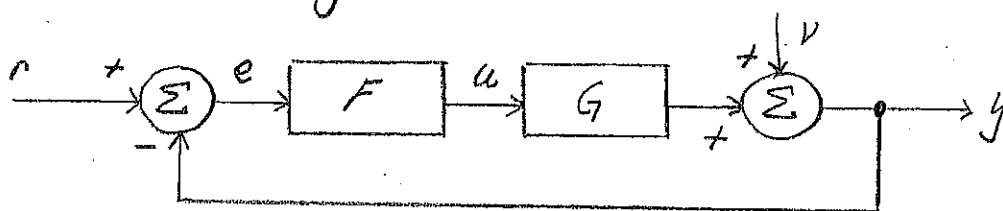


LEAD-LÄNK: $F_{\text{LEAD}}(s) = K \frac{\gamma_0 s + 1}{\beta \gamma_0 s + 1}$, HÖJER FASKURVAN
VID ω_c

LAG-LÄNK: $F_{\text{LAG}}(s) = \frac{\gamma_I s + 1}{\gamma_T s + 1}$, HÖJER LÅGFREKVENSS-
FÖRSTÄRKNINGEN

KÄNSLIGHETSFUNKTIONEN $S(s)$

$S(s)$ ÄR ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN FRÅN STÖRSIGNAL
 v TILL UT SIGNAL y .



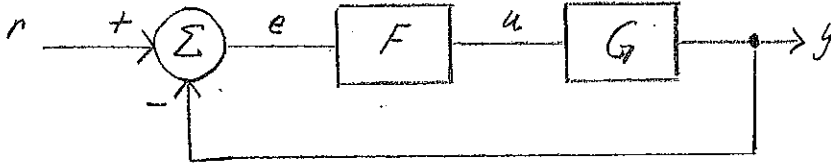
"GÅ" I BLOCKSCHEMAT $\Rightarrow S(s) = \frac{1}{1+FG} = \frac{1}{1+G_0}$

OM $|S(j\omega)| < 1$ SÅ UNDERTRYCKS STÖRNINGEN.

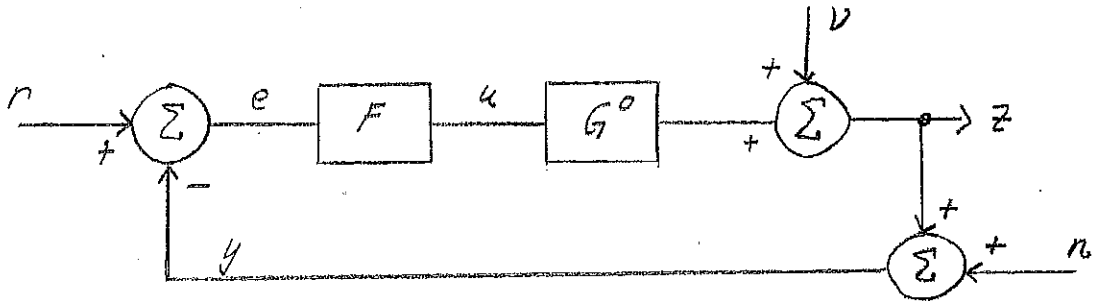
TEORI

▣ VAD GER SÄMRE PRESTANDA HOS VÅRT SYSTEM?

◦ VÅR MODELL:



◦ VERKLIGA SYSTEMET:



▣ STÖRSIGNAL v OCH MODELLFEL:

- VI TROR ATT $Y(s) = G(s)U(s)$.
- Egentligen har systemet överföringsfunktionen G^0 och egentligen läggs en störsignal v till utsignalen.
 $\Rightarrow Z(s) = G^0(s)U(s) + V(s)$

▣ MÄTFEL n :

- VI BENÄMNER DEN SIGNAL SOM VI MÄTER MED y .
- VI BENÄMNER SYSTEMETS VERKLIGA UTSIGNAL MED z .
- VI TROR ATT $Y(s) = Z(s)$ (PERFEKT MÄTNING)

Egentligen så påverkas mätningen av mätbrus n .

$$\Rightarrow Y(s) = Z(s) + N(s)$$

▣ BEGRÄNSAD INSIGNAL u :

- DET FINNS FYSIKALISKA/TEKNISKA BEGRÄNSNINGAR FÖR HUR STORA INSIGNALER VI KAN GENERERA.

■ (FRÅN TIDIGARE) KÄNSLIGHETS FUNKTIONEN $S(s)$

- $S(s)$ ÄR ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN FRÅN V TILL y .

$$S(s) = \frac{1}{1+GF} = \frac{1}{1+G_0}$$

- FÖR ATT MINSKA STÖRNINGEN V 'S PÅVERKAN PÅ y SÅ KRÄVS ETT LITET $S(s)$, ALLTSÅ ETT STORT $G_0(s)$.

■ KOMPLEMENTÄRA KÄNSLIGHETS FUNKTIONEN $T(s)$

- $T(s)$ ÄR ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN FRÅN N TILL Z MED OMVÄNT TECKEN.

"GÅ" I BLOCKSCHEMAT:

$$Z(s) = G(s)U(s) + V(s)$$

$$U(s) = F(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = Z(s) + N(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z(s) &= G(s)(F(s)(R(s) - Z(s) - N(s))) + V(s) = \\ &= G(s)F(s)R(s) - G(s)F(s)Z(s) - G(s)F(s)N(s) + V(s) \end{aligned}$$

$$\text{BYT OT } Z(s): Z(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}}_{G_c(s)} R(s) - \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}}_{T(s)} N(s) + \underbrace{\frac{1}{1+G(s)F(s)}}_{S(s)} V(s)$$

$$\text{SÄTT } R(s) = V(s) = 0: Z(s) = - \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} N(s)$$

- $T(s) = \frac{GF}{1+GF} = G_c$

- FÖR ATT MINSKA MÄTBURSET N 'S PÅVERKAN PÅ Z SÅ KRÄVS ETT LITET $T(s)$.

■ RELATIONEN MELLAN $S(s)$ OCH $T(s)$:

$$S(s) + T(s) = 1$$

- VI MÅSTE ALLTSÅ PRIORITERA MELLAN STÖRNINGARS INVERKAN OCH MÄTBURSETS INVERKAN.

ROBUSTHET

- ROBUSTHET BESKRIVER ETT SYSTEMS TOLERANS MOT MODELLFEL.
- LÅT DET VERKLIGA SYSTEMET BENÄMNAS $G^0(s)$ OCH MODELLEN AV SYSTEMET BENÄMNAS $G(s)$, DÅ HAR VI

$$G^0(s) = G(s) (1 + \Delta_G(s))$$

DÄR $\Delta_G(s)$ ÄR DET SÅ KALLADE RELATIVA MODELLFELET. $\Delta_G(s)$ ÄR OKÄND (ANNARS SKULLE VI KÄNNA TILL $G^0(s)$ EXAKT) MEN KAN OFTAST BEGRÄNSAS PÅ NÅGOT SÄTT.

ROBUSTHETSKRITERIUM: (SIDA 125)

GIVET EN ÅTERKOPPLING $F(s)$ SOM STABILISERAR EN MODELL $G(s)$, ANTAG ATT $G(s)$ OCH $G^0(s)$ HAR SAMMA ANTAL POLER I HHP SAMT ATT $F(s)G(s)$ OCH $F(s)G^0(s)$ BÅDA GÅR MOT NOLL DÅ $|s|$ GÅR MOT OÄNDLIGHETEN.

DÅ ÄR DET SLUTNA SYSTEMET DÅ $G^0(s)$ ÅTERKOPPLAS MED $F(s)$ STABILT OM

$$|\Delta_G(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|} \quad \forall \omega$$

OBSERVERA ATT KRITERIUMET ÄR ETT TILLRÄCKLIGT MEN INTE NODVÄNDIGT VILLKOR FÖR STABILITET. ALLTSÅ, SYSTEMET KAN VARA STABILT ÄVEN OM KRITERIUMET INTE ÄR UPPFYLLT.

TILLSTÅNDSBESKRIVNING

- HÖGRE ORDNINGENS LINJÄRA DIFF. EKVATIONER KAN SKRIVAS SOM ETT SYSTEM AV FÖRSTA ORDNINGENS DIFF. EKVATIONER.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{DÄR } A, B, C, D \text{ ÄR MATRISER}$$

$$y(t) = \text{UTSIGNAL}$$

$$u(t) = \text{INSIGNAL}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{ÄR SYSTEMETS TILLSTÅNDSVEKTOR OCH } x_i(t) \text{ ÄR SYSTEMETS TILLSTÅNDSVARIABLER.}$$

- TILLSTÅNDSBESKRIVNING \Rightarrow ÖVERFÖRINGSFUNKTION

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (\text{SIDA 162})$$

- ÖVERFÖRINGSFUNKTION \Rightarrow TILLSTÅNDSBESKRIVNING

SVÅRT. DET FINNS OÄNDLIGT MÅNGA TILLSTÅNDSBESKRIVNINGAR FÖR ETT GIVET SYSTEM. TVÅ STANDARDMETODER ÄR GIVNA I BOKEN, STYRBAR KANONISK FORM OCH OBSERVERBAR KANONISK FORM.

LINJÄRISERING

ETT SÄTT ATT APPROXIMERA OMLINJÄRA FUNKTIONER MED LINJÄRA KRING EN VISS PUNKT. (TAYLOR UTVECKLING)

(SIDA 155)

6.7a

SKIPPA

- Två alternativ: ① Använd Matlab och klicka i figur.
- ② Sätt $s=i\omega$ och se för vilket α ekvationen är uppfylld. Skissa rotort.

Oavsett metod så måste vi hitta $G_C(s)$ och skriva dess nämnare på formen $P(s) + \alpha Q(s) = 0$.

② • Hitta $G_C^0(s)$ (Obs! Tittar på det slutna verkliga systemet.)

$$G_C^0(s) = \frac{F(s) G(s)}{1 + F(s) G(s)} = \left\{ G(s) = G(s) \frac{\alpha}{s+\alpha} \right\} = \frac{F(s) G(s) \alpha}{1 + \frac{F(s) G(s) \alpha}{s+\alpha}}$$

$$= \frac{F(s) G(s) \alpha}{s+\alpha + F(s) G(s) \alpha} = \left\{ \begin{array}{l} F(s) = 4 \\ G(s) = 1/(s(s+1)) \end{array} \right\} = \frac{4\alpha}{s(s+1) + 4\alpha}$$

$$= \frac{4\alpha}{s(s+1)(s+\alpha) + 4\alpha}$$

• Identifiera $P(s)$ och $Q(s)$.

NÄMNAREN: $s(s+1)(s+\alpha) + 4\alpha \leftrightarrow P(s) + \alpha Q(s) = 0$

$$s^2(s+1) + \alpha s(s+1) + 4\alpha \rightarrow$$

$$s^2(s+1) + \alpha(s(s+1) + 4) \rightarrow$$

$$P(s) = s^2(s+1) \text{ och } Q(s) = s(s+1) + 4$$

Koll: grad($P(s)$) = 3, grad($Q(s)$) = 2, $3 > 2$ OK!

• Sätt $s=i\omega$

$$P(i\omega) + \alpha Q(i\omega) = 0 \rightarrow (i\omega)^2(i\omega+1) + \alpha \cdot i\omega(i\omega+1) + 4\alpha =$$

$$- \omega^2(i\omega+1) - \alpha \omega^2 + \alpha i\omega + 4\alpha =$$

$$- \omega^3 i - \omega^2 - \alpha \omega^2 + \alpha \omega i + 4\alpha = 0$$

Im-DEL: $-\omega^3 + \alpha \omega = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{\alpha}, \omega_3 = -\sqrt{\alpha}$

MEN $\omega > 0$ SÅ VI KAN DIREKT STRYKA $\omega_3 = -\sqrt{\alpha}$.

RE-DEL: $-\omega^2 - \alpha \omega^2 + 4\alpha = 0 \rightarrow -\omega^2(1+\alpha) + 4\alpha = 0 \rightarrow$

$$\omega^2 = \frac{4\alpha}{1+\alpha} \rightarrow \omega_1 = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}, \omega_2 = \frac{-2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

MEN $\omega > 0$ SÅ STRYK ω_2 .

VET NU ATT $w = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$ (1) (FRÅN RE-DEL.)

VIKAN HITTA α GENOM ATT KOLLA PÅ $w=0$ OCH $w=\sqrt{\alpha}$.
(FRÅN IM-DEL).

$w=0$, (1) $\rightarrow \alpha=0 \Rightarrow$ EN STARTPUNKT ($\alpha=0$), ROTORJEN
LIGGER I ORIGO ($w=0$).

$$w=\sqrt{\alpha}, (1) \rightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} \rightarrow 1 = \frac{2}{\sqrt{1+\alpha}} \rightarrow \sqrt{1+\alpha} = 2$$

$$\Rightarrow 1+\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 3$$

\Rightarrow IM-AXELN KORSAS PÅ $\alpha=3$ VID $s = \pm i\sqrt{3}$.

0 FRÅN SKISS AV ROTORT KAN VI NU SE ATT DET STÄNGDA SYSTEMET
ÄR ASYMPTOTTEKT STABILT FÖR $\alpha > 3$. DÅ LIGGER 6:5 POLER STRIKT
I HHP.

6.7b

ROBUSTHETSKRITERIUM PÅ SIDAN 125.

KAN VI ANVÄNDA KRITERIET?

- o G OCH G^0 SKA HA SAMMA # POLER I HHP.

POLER TILL G : $G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow s_1=0, s_2=-1$

POLER TILL G^0 : $G^0(s) = G(s) \frac{\alpha}{s+\alpha} = \frac{1}{s(s+1)} \frac{\alpha}{s+\alpha}$, $\alpha > 0$, $\rightarrow s_1=0, s_2=-1$
 $s_3 = -\alpha < 0$

$\Rightarrow G$ OCH G^0 HAR SAMMA # POLER I HHP.

- o $F(s)G(s)$ OCH $F(s)G^0(s)$ SKA GÅ MOT 0 DÅ $|s| \rightarrow \infty$.

$F(s)G(s) = \frac{4}{s(s+1)} \rightarrow 0$ DÅ $|s| \rightarrow \infty$

$F(s)G^0(s) = \frac{4}{s(s+1)} \frac{\alpha}{s+\alpha} \rightarrow 0$ DÅ $|s| \rightarrow \infty$

OK!

KRITERIUM: Om $G^0(s)$ ÅTERKOPPLAS MED $F(s)$ SÅ BLIR $G_c(s)$ STABILT OCH

$$|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega$$

- o Hitta Δ_G

VET ATT: $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$

$$G^0(s) = G(s) \frac{\alpha}{s+\alpha} = G(s) \left(1 - 1 + \frac{\alpha}{s+\alpha} \right) = G(s) \left(1 + \left(-1 + \frac{\alpha}{s+\alpha} \right) \right)$$

IDENTIFIERAR $\Delta_G(s)$: $\Delta_G(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} - 1 = \frac{\alpha - s - \alpha}{s+\alpha} = \frac{-s}{s+\alpha}$

- o Hitta T

VET ATT: $T = G_c$, ALLTSÅ HAR VI BODEPLOTT FÖR $|T(i\omega)|$.

- o INVERTERAT KRITERIUM: $|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \quad \forall \omega$

FÖR VILKA α LIGGER $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|}$ OVANFÖR KURVAN $|T(i\omega)| \quad \forall \omega$?

o HAR ATT $\frac{1}{\Delta_G(s)} = \frac{s+\alpha}{-s}$. VAD VET VI OM BODE FÖR $\frac{1}{\Delta_G(s)}$?

BODEANALYS ("SKISSA BODE"-TÄNK):

* FAKTORISERA: $\frac{1}{\Delta_G(s)} = \frac{1 + s/\alpha}{-s/\alpha}$

* LÅGFREKVENSHASYMPTOT: $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+\alpha}{-s} = \frac{-\alpha}{s} \rightarrow \frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|}_{lf} = \frac{\alpha}{\omega}$

* HÖGFREKVENSHASYMPTOT: $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+\alpha}{-s} = -1 \rightarrow \frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|}_{hf} = 1$

* BRYTPUNKTER:

PUNKT	0	α
TYP	POL	NOLL
BIDRAG	-1	+1
LUTNING	-1	0

VI VET ALLTSÅ ATT $\frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|}$ BERÖRAR 1 OCH MED LUTNING -1. RUNT

$\omega = \alpha$ SÅ ÖVERGÅR LUTNINGEN MOT 0 OCH $\frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|}$ KONVERGERAR MOT 1.

\Rightarrow KRITERIET ÄR UPPFYLLETT OM $\frac{1}{|\Delta_G(j\omega_{TOPP})|} > |T(j\omega_{TOPP})|$.

UR BODE: $\omega_{TOPP} = 2$ OCH $|T(j\omega_{TOPP})| = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{|\Delta_G(j2)|} > 2 \Rightarrow \left| \frac{2j+\alpha}{2j} \right| > 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{2} > 2 \Rightarrow \alpha > \sqrt{12} (> 3)$

(67c) KRITERIET GAV ETT STÖRRE α ÄN VAD ROTORTEN GJORDE. VÄR FÖR?

ROBUSHETSKRITERIET ÄR ETT TILLRÄCKLIGT VILLKOR FÖR STABILITET.

ROTORTEN VISAR VAR POLERNA LÄGER STRIKT I VHP, DETTA ÄR ETT TILLRÄCKLIGT OCH NOOVÄNDIGT VILLKOR.

8.2

■ GIVET: SYSTEMBESKRIVNING: $l\ddot{\theta} + g\sin\theta + \dot{z}\cos\theta = 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{TILLSTÄND})$$

$$u = \dot{z}/l \quad (\text{INTEGRAL})$$

$$y = 0 \quad (\text{UTSIGNAL})$$

$$\omega_0^2 = g/l$$

■ VI SKA LINJÄRISERA RUNT JÄMVIKTPUNKTEN

$$x = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ DÅ } u = 0. \quad (\text{FÖR "RECEPT", SE SIDAN 155.})$$

① LINJÄR TILLSTÄNDSFORM:

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta + \dot{z}\cos\theta = 0 \Leftrightarrow l\dot{x}_2 + g\sin x_1 + u\cos x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2 + \frac{g}{l}\sin x_1 + u\cos x_1 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \triangleq f_1(x, u) \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - u\cos x_1 \triangleq f_2(x, u) \\ y = x_1 \triangleq h(x, u) \end{cases}$$

② JÄMVIKTPUNKTEN: (REDAN GIVEN HÄR.)

$$x_0 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, u_0 = 0, y_0 = \pi$$

$$\text{KOLL: } f_1(x_0, u_0) = x_{2,0} = 0 \quad \text{OK!}$$

$$f_2(x_0, u_0) = -\frac{g}{l}\sin x_{1,0} - u_0\cos x_{1,0} = -0 - 0 = 0 \quad \text{OK!}$$

$$h(x_0, u_0) = x_{1,0} = \pi = y_0 \quad \text{OK!}$$

④ JACOBIANERNA:

$$\bullet A = f_x(x_0, u_0)$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix}$$

$$f_x(x, u) = \begin{bmatrix} f_{1,x_1}(x, u) & f_{1,x_2}(x, u) \\ f_{2,x_1}(x, u) & f_{2,x_2}(x, u) \end{bmatrix}$$

③ SMÅ AVVIKELSER:

$$x = x_0 + \Delta x = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta x$$

$$u = u_0 + \Delta u = \Delta u$$

$$f_{1,x_1}(x,u) = \frac{d}{dx_1}(x_2) = 0$$

$$f_{1,x_2}(x,u) = \frac{d}{dx_2}(x_2) = 1$$

$$f_{2,x_1}(x,u) = \frac{d}{dx_1}\left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - u\cos x_1\right) = -\frac{g}{l}\cos x_1 + u\sin x_1$$

$$f_{2,x_2}(x,u) = \frac{d}{dx_2}\left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - u\cos x_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow f_x(x,u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 + u\sin x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_x(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\circ B = f_u(x_0, u_0)$$

$$f_u(x,u) = \begin{bmatrix} f_{1,u}(x,u) \\ f_{2,u}(x,u) \end{bmatrix}$$

$$f_{1,u}(x,u) = \frac{d}{du}(x_2) = 0$$

$$f_{2,u}(x,u) = \frac{d}{du}\left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - u\cos x_1\right) = -\cos x_1$$

$$\Rightarrow f_u(x,u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_u(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\circ C = h_x(x_0, u_0)$$

$$h(x,u) = x_1$$

$$h_x(x,u) = [h_{x_1}(x,u) \quad h_{x_2}(x,u)]$$

$$h_{x_1}(x,u) = \frac{d}{dx_1}(x_1) = 1$$

$$h_{x_2}(x,u) = \frac{d}{dx_2}(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow h_x(x,u) = [1 \quad 0]$$

$$\Rightarrow h_x(x_0, u_0) = [1 \quad 0]$$

$$0 D = h_u(x_0, u_0)$$

$$h_u(x, u) = h_u(x, u) \quad (\text{BLIR HÄR EN SKALÄR.})$$

$$h_u(x, u) = \frac{d}{du}(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow h_u(x, u) = 0$$

$$\Rightarrow h_u(x_0, u_0) = 0$$

⑤ LINJÄRISERADE EKVATIONEN

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u$$

$$\Delta y = C \Delta x + D \Delta u$$

\Leftrightarrow

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

8.6

✓ FÖLJER RESULTATET PÅ SIDAN 162.

✓ IDENTIFIERA A, B, C, D:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [-1 \ 2], D = 0$$

✓ FORMEL (8.15) \Rightarrow

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (I = \text{IDENTITETSMATRISEN})$$

$$= (-1 \ 2) \left[s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0$$

$$= (-1 \ 2) \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{SE BETA FÖR} \\ \text{INVERS AV} \\ \text{2x2 MATRIS} \end{array} \right\} =$$

$$= (-1 \ 2) \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)} (-1 \ 2) \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)} (-s-3 \ -1+2s+4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)} (-s-3-1+2s+4) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$$

8.3

BESKRIV SYSTEMET PÅ TILLSTÄNDSFORM.

INSIGNAL: $u = \begin{bmatrix} i \\ m_1 \end{bmatrix}$ (GIVET)

UTSIGNAL: y (GIVET)

VILL SKRIVA SYSTEMET PÅ FORMEN:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

① VÄLD TILLSTÄND:

DE KAN VÄLDAS PÅ OLIKA SÄTT.

TIPS: VÄLD SIGNALER EFTER EN INTEGRATOR $\frac{1}{s}$ SOM TILLSTÄND. DET GER 1::a ORNINGENS DIFF. EKVATIONER FÖR TILLSTÄNDEN.

TIT I BLOCKSCHEMAT GER: $x_1 = y, x_2 = \theta, x_3 = z$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ z \end{bmatrix}$$

② UTTRYCK FÖR TILLSTÄNDEN:

BLOCKSCHEMAT GER UTTRYCK FÖR TILLSTÄNDEN SOM FUNKTIONER AV ANDRA TILLSTÄND OCH INSIGNALER.

"GÅ" I BLOCKSCHEMAT:

$$X_1(s) = Y(s) = \frac{1}{s} (M_1(s) + K_2 \Theta(s)) = \frac{1}{s} (M_1(s) + K_2 X_2(s))$$

$$X_2(s) = \Theta(s) = \frac{1}{s} (Z(s) - Y(s)) = \frac{1}{s} (X_3(s) - X_1(s))$$

$$X_3(s) = Z(s) = \frac{1}{s} (M_2(s) - M_3(s)) = \frac{1}{s} (K_I I(s) - K_2 \Theta(s)) = \frac{1}{s} (K_I I(s) - K_2 X_2(s))$$

③ Hitta nosderivatan av tillstånden:

MULTIALICERA MED S:

$$s X_1(s) = M_1(s) + K_2 X_2(s) \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = m_1(t) + K_2 x_2(t)$$

$$s X_2(s) = X_3(s) - X_1(s) \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = x_3(t) - x_1(t)$$

$$s X_3(s) = K_I I(s) - K_2 X_2(s) \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \dot{x}_3(t) = K_I i(t) - K_2 x_2(t)$$

④ SKRIV PÅ ÖNSKAD MATRISFORM:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e} \\ m_1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

8.4a

■ Skriv $\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y = 6u$ på tillståndsform.

■ 3:e ordningens diff.ERV. \Rightarrow 3 tillstånd, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

① VÄL TILLSTÅND

$$x_1(t) = y, \quad x_2(t) = \dot{y}, \quad x_3(t) = \ddot{y}$$

② UTRYCK FÖR TILLSTÅNDEN

(Som ovan)

③ Hitta tidsderivatorna för tillstånden

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) = \ddot{y}'(t) &= \{\text{från ovan}\} = -6\dot{y}'(t) - 11\dot{y}(t) - 6y(t) + 6u(t) = \\ &= -6x_3(t) - 11x_2(t) - 6x_1(t) + 6u(t) \end{aligned}$$

④ Skriv på önskad matrisform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

8.4b

SKRIV $\ddot{y} + \dot{y} + 5y + 3y = 4\ddot{u} + \dot{u} + 2u$ PÅ TILLSTÄNDSFORM.

3: E DROMINGETV'S DIFF. EKV. \Rightarrow 3 TILLSTÄND $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

TA FRAM ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN: $G: u \Rightarrow y$

$$s^3 Y(s) + s^2 Y(s) + 5s Y(s) + 3Y(s) = 4s^2 U(s) + sU(s) + 2U(s)$$

$$Y(s) = \frac{4s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + 5s + 3} U(s)$$

OBSERVERBAR KANONISK FORM (TILL EREMPEL)

RESULTATET PÅ SIDAN 159 \Rightarrow

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$

8.4c

SKRIV $G(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6}$ PÅ TILLSTÄNDSFORM

OBSERVERBAR KANONISK FORM

SIDA 159 \Rightarrow

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] x$$

STYRBAR KANONISK FORM

SIDA 158 \Rightarrow

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \ 3] x$$