FÖRRA GÅNGEN

- NYQUISTKRITERIET:

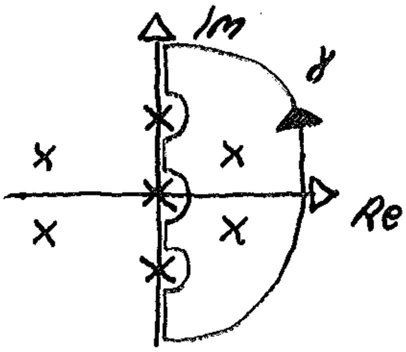
STABILITET UNDERSÖKS GENOM ATT TITTA PÅ ÖPPNA SYSTEMETS POLER.

$$\boxed{P_c = P_0 + \#\text{VARV } \gamma' \text{ OMSLUTER } -1}$$

- KURVAN γ SKA OMSLUTA HHP.

OBS! KURVAN γ FÅR EJ KORSA POLER TILL $G_0(s)$. OM DET FINNS POLER PÅ Im-AXELN SÅ SKA DE UTESLUTAS.

(STÅR EJ UTTRYCKLIGEN I BOKEN. KOM IHÅG!)



X = POLER TILL $G_0(s)$

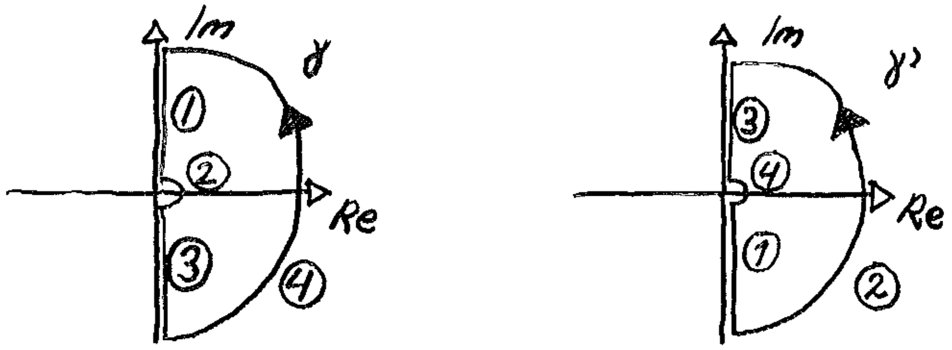
STORA HALVCIRKELNS RADIE: $R \to \infty$

LILLA HALVCIRKELNS RADIE: $r \to 0$

- NYQUISTKURVAN:

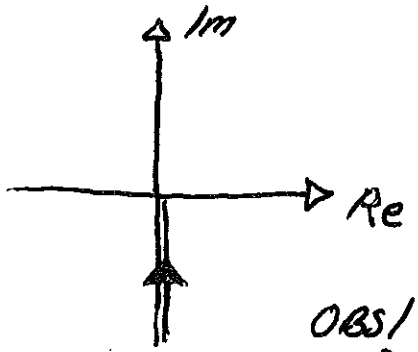
  DEN DEL AV γ' SOM KOMMER FRÅN POSITIVA Im-AXELN NÄR <u>ω GÅR FRÅN 0 TILL ∞.</u>

- EXEMPEL 3.16 a (TAL FRÅN FÖRRA ÖVNINGEN)



HÄR: POSITIVA Im-AXELN AVBILDAS PÅ NEGATIVA Im-AXELN.

$\Rightarrow$ NYQUISTKURVAN



OBS!
MOTSATT RIKTNING TILL γ'.

- FÖRENKLAT NYQUISKRITERIUM:

  OM $G_0(s)$ EJ HAR POLER I HHP, SÅ ÄR DET SLUTNA SYSTEMET INSIGNAL-UTSIGNAL STABILT PRECIS DÅ PUNKTEN -1 LIGGER TILL VÄNSTER OM NYQUISTKURVAN.

ÖVNING 5

TEORI

- MOTIVERING TILL FREKVENSBESKRIVNING.

  * FUNKTIONER KAN BESKRIVAS SOM SUMMOR ÖVER SIN- OCH COS-FUNKTIONER (FOURIER-SERIER) ELLER SOM INTEGRALER ÖVER SIN- OCH COS-FUNKTIONER (FOURIERTRANSFORMER).

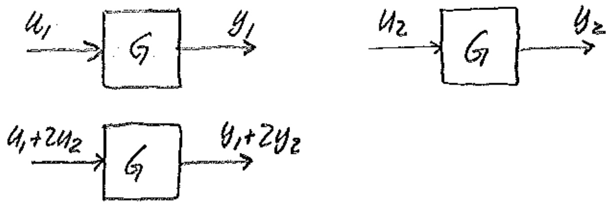
- FREKVENSSVAR: FUNKTIONEN $G(i\omega)$, ALLTSÅ $s = i\omega$ DÄR $\omega : 0 \to \infty$.

- LINJÄRT TIDSINVARIANT (LTI) SYSTEM

  * FÖR LINJÄRA SYSTEM GÄLLER SUPERPOSITION.

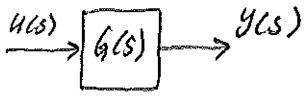
  DVS. EN LINJÄR KOMBINATION AV INSIGNALER GER SAMMA LINJÄR KOMBINATION AV UTSIGNALER.

  EX.



  * TIDSINVARIANT: "DET SPELAR EJ ROLL NÄR EXPERIMENTET BÖRJADE, UTAN HUR LÄNGE DET HAR HÅLLIT PÅ ÄR VIKTIGT."

- SINUSFUNKTION SOM INSIGNAL:



ANTAG ATT $G(s)$ ÄR LTI SAMT ATT TRANSIENTERNA HAR FÖRSVUNNIT.

$$u(t) = A\sin(\omega t)$$

$$y(t) = \underbrace{|G(i\omega)|}_{\text{FÖRSTÄRKNINGEN}} A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{DÄR} \quad \phi = \arg(G(i\omega))$$

$\Rightarrow$ UTSIGNALEN BLIR OCKSÅ EN SINUSFUNKTION MED SAMMA FREKVENS MEN FASFÖRSKJUTEN ϕ OCH EN AMPLITUD SOM ÄR SKALAD $|G(i\omega)|$.

4,1

- ANSÄTT G_T: 1:A ORD. LINJÄRT SYST. $\rightarrow G_T = \frac{a}{s+b}$
- LTI $\rightarrow$ SINUS IN – SINUS UT!

VET ATT: $u(t) = A \sin w(t)$ GER $y(t) = |G(iw)| A \sin(wt+\phi)$

$\phi = \arg(G(iw))$

* FRÅN GRAF:

INSIGNALENS PERIOD: $T_{IN} = 0.314 \text{ MIN} = 18.84 s$

$\rightarrow$ INSIGNALENS FREKVENS: $w_{IN} = \frac{2\pi}{T_{IN}} \frac{rad}{s} = 0,33 \frac{rad}{s}$

UTSIGNALENS TIDSFÖRSKJUTNING: $\Delta t = -0,056 \text{ MIN} = -3,36 s$
(UTS. LIGGER EFTER.)

$\rightarrow$ UTSIGNALENS FASFÖRSKJUTNING: $\phi = \frac{2\pi \Delta t}{T_{IN}} = -1,12 \text{ rad}$

INSIGNALENS AMPLITUD: $A = 32°C - 30°C = 2°C$
UTSIGNALENS AMPLITUD: $|G(iw)| A = 30,9°C - 30°C = 0,9°C$

$\rightarrow$ UTSIGNALENS FÖRSTÄRKNING: $|G(iw)| = \frac{|G(iw)|A}{A} = \frac{0,9}{2} = 0,45$

- IDENTIFIERA a OCH b:

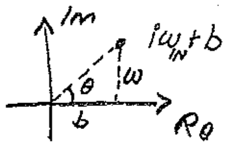
$$|G(iw_{IN})| = \left|\frac{a}{iw_{IN}+b}\right| = \frac{|a|}{|iw_{IN}+b|} = \frac{|a|}{\sqrt{w_{IN}^2+b^2}} = 0,45 \quad (1)$$

$$\phi = \arg(G(iw_{IN})) = \arg\left(\frac{a}{iw_{IN}+b}\right) = \arg(a) - \arg(iw_{IN}+b) = -\arctan\left(\frac{w_{IN}}{b}\right) = -1,12 \text{ rad} \quad (2)$$

* MOTIVERING: ANTAG $a > 0 \rightarrow \arg(a) = 0$

KVAR $-\arg(iw_{IN}+b)$

ANTAG $b > 0 \rightarrow$ STABILT SYSTEM



$\arg(iw_{IN}+b) = \theta = \arctan\left(\frac{w_{IN}}{b}\right)$

(2) $\rightarrow b$: $-\arctan\left(\frac{w_{IN}}{b}\right) = -1,12 \rightarrow \tan(1,12) = \frac{w_{IN}}{b} \rightarrow b = \frac{w_{IN}}{\tan(1,12)} =$

$\approx \frac{0.33}{2.07} \approx 0,16$

SÄTT IN I (1): $a = 0{,}45\sqrt{w_{in}^2 + b^2} \approx 0{,}17$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{0{,}17}{s + 0{,}16}$$

BODEDIAGRAM

- ☐ BODEDIAGRAMET BESTÅR AV TVÅ DIAGRAM:
  - * $|G(i\omega)|$ - BELOPPSKURVA (OFTA LOGARITMISK SKALA)
  - * $\arg(G(i\omega))$ - FASKURVA

  DÄR $\omega: 0 \to \infty$.

- ☐ NOTERA ATT NYQUISTKURVAN ÄR PLOT AV $G(i\omega)$ DÄR $\omega: 0 \to \infty$.

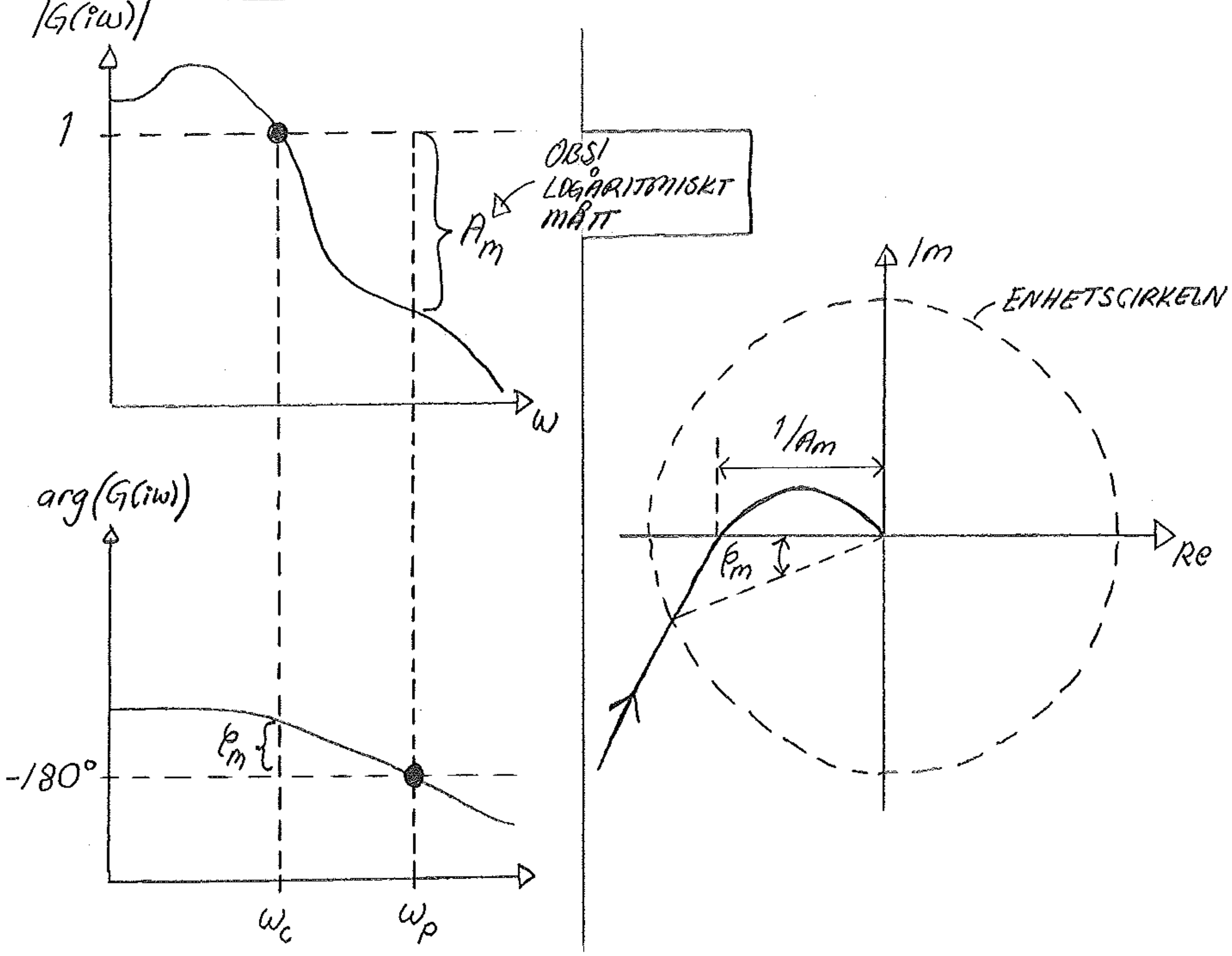
  BODE OCH NYQUIST ÄR ALLTSÅ PLOTTAR AV SAMMA SAK!

- ○ I BODE PLOTTAR VI BELOPP OCH FAS SEPARAT.
- ○ I NYQUIST PLOTTAR VI BÅDA SAMTIDIGT, SAMT TAR HÄNSYN TILL TECKEN PÅ $G(i\omega)$.

SÅ, HUR SER SAMBANDEN UT MELLAN BODEDIAGRAM OCH NYQUIST?

☐ SAMBAND MELLAN BODEDIAGRAM OCH NYQUISTKURVAN:

BODE NYQUIST



* ω_p = FASSKÄRFREKVENSEN
  BODE: DET ω DÄR FASKURVAN SKÄR −180°.
  NYQUIST: DET ω DÄR NYQUISTKURVAN SKÄR NEGATIVA RE-AXELN.

* ω_c = SKÄRFREKVENSEN
  BODE: DET ω DÄR BELOPPSKURVAN SKÄR 1.
  NYQUIST: DET ω DÄR NYQUISTKURVAN SKÄR ENHETSCIRKELN.

* φ_m = FASMARGINALEN: ETT MÅTT PÅ HUR MYCKET FASKURVAN KAN FÖRSKJUTAS INNAN INSTABILT.
  BODE: FASKURVANS AVSTÅND TILL −180° VID $\omega = \omega_c$.
  NYQUIST: VINKELN MELLAN NEG. RE-AXELN OCH DEN PUNKT DÄR NYQUISTKURVAN SKÄR ENHETSCIRKELN.

* A_m = AMPLITUDMARGINALEN: ETT MÅTT PÅ HUR MYCKET AMPLITUDKURVAN KAN HÖJAS INNAN INSTABILT.
  BODE: AMPLITUDKURVANS AVSTÅND TILL 1 VID $\omega = \omega_p$. (LOGARITMISKT)
  NYQUIST: INVERSA AVSTÅNDET FRÅN ORIGO TILL DEN PUNKT DÄR NYQUISTKURVAN SKÄR NEG. RE-AXELN.

SKISSA BODEDIAGRAM

① FAKTORISERA $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(1+s/z_1)(1+s/z_2)\cdots(1+s/z_m)}{s^p(1+s/p_1)(1+s/p_2)\cdots(1+s/p_m)}$$

p = ANTAL POLER I ORIGO (EV. ÄR $p=0$)

m = ANTAL NOLLSTÄLLEN

n = ANTAL POLER

② BERÄKNA LÅGFREKVENSASYMPTOT:

DE TERMER I $G(i\omega)$ SOM DOMINERAR FÖR SMÅ ω.

③ BERÄKNA HÖGFREKVENSASYMPTOT:

DE TERMER I $G(i\omega)$ SOM DOMINERAR FÖR STORA ω.

④ IDENTIFIERA BRYTPUNKTER:

PUNKTERNA DÄR $\omega = z_1, z_2, \ldots, z_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$.

⑤ IDENTIFIERA BIDRAG TILL LUTNING PÅ AMPLITUDKURVA:

* BRYTPUNKT SOM MOTSVARAR POL GER −1 DEKAD PER DEKAD I BIDRAG.

* BRYTPUNKT SOM MOTSVARAR NOLLSTÄLLE GER +1 DEKAD PER DEKAD I BIDRAG.

⑥ FÖRANKRA AMPLITUDKURVAN I EN PUNKT.

⑦ BERÄKNA $\arg(G(i\omega))$ FÖR NÅGRA ω. BASERAT PÅ DETTA PLOTTA FASKURVAN.

4.2a SKISSA BODEPLOTT FÖR $F G_r G_s$ DÅ $K = 0.5$. (SIDA 83-91 I KURSBOK)

VAD ÄR $G_s(s)$?

INSIGNAL: δ (VINKEL PÅ RODRET)
UTSIGNAL: ψ (VINKEL PÅ BÅTEN)

$$\Rightarrow \psi(s) = G_s(s)\Delta(s)$$

DIFF. EKVATION: $\omega = \dot{\psi}$ (1) OCH $T_1\dot{\omega} = -\omega + K_1\delta$ (2)

(1) I (2): $T_1\ddot{\psi} = -\dot{\psi} + K_1\delta$

LAPLACE $\rightarrow$ $T_1 s^2 \psi(s) = -s\psi(s) + K_1\Delta(s)$.

BRYT UT $\psi(s)$: $\psi(s) = \underbrace{\frac{K_1}{T_1 s^2 + s}}_{G_s(s)} \Delta(s)$

VAD BLIR $G_0(s) = F(s)G_r(s)G_s(s)$?

$$G_0(s) = \frac{K(1+s/a)}{1+s/b} \cdot \frac{1}{1+sT_2} \cdot \frac{K_1}{T_1 s^2 + s}$$

SKISSA BODEDIAGRAM.

① FAKTORISERAD FORM:

$$G_0(s) = \frac{KK_1(1+s/a)}{s\left(1+\frac{s}{b}\right)\left(1+\frac{s}{1/T_2}\right)\left(1+\frac{s}{1/T_1}\right)}$$

② LÅGFREKVENSASYMPTOT:

$$\lim_{s\to 0} G_0(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KK_1}{s} = \left\{\begin{matrix} K=0.5 \\ K_1=0.1 \end{matrix}\right\} = \lim_{s\to 0} \frac{0.05}{s}$$

$$\underbrace{|G_0(i\omega)|_{lf}}_{\text{LÅGFREKVENS}} = \left|\frac{0.05}{i\omega}\right| = \frac{0.05}{\omega}$$

③ HÖGFREKVENSASYMPTOT:

$$\lim_{s\to\infty} G_0(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{KK_1\, s/a}{s\cdot\frac{s}{b}\cdot\frac{s}{1/T_2}\cdot\frac{s}{1/T_1}} = \lim_{s\to\infty} \frac{KK_1/a}{s^3/(b/T_1T_2)} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{KK_1}{a}\cdot\frac{T_1T_2}{b}\cdot\frac{1}{s^3} = \lim_{s\to\infty} \frac{50\,000}{s^3}$$

$$\underbrace{|G_0(i\omega)|_{hf}}_{\text{HÖGFREKVENS}} = \left|\frac{50\,000}{(i\omega)^3}\right| = \frac{50\,000}{\omega^3}$$

④ OCH ⑤ BRYTPUNKTER OCH BIDRAG:

PUNKT	0	$1/T_1 = 0.01$	$a = 0.02$	$b = 0.05$	$1/T_2 = 0.1$
TYP	POL	POL	NOLL	POL	POL
BIDRAG	−1 DEK/DEK	−1 DEK/DEK	+1 DEK/DEK	−1 DEK/DEK	−1 DEK/DEK
LUTNING	−1 DEK/DEK	−2 DEK/DEK	−1 DEK/DEK	−2 DEK/DEK	−3 DEK/DEK

⑥ FÖRANKRA:

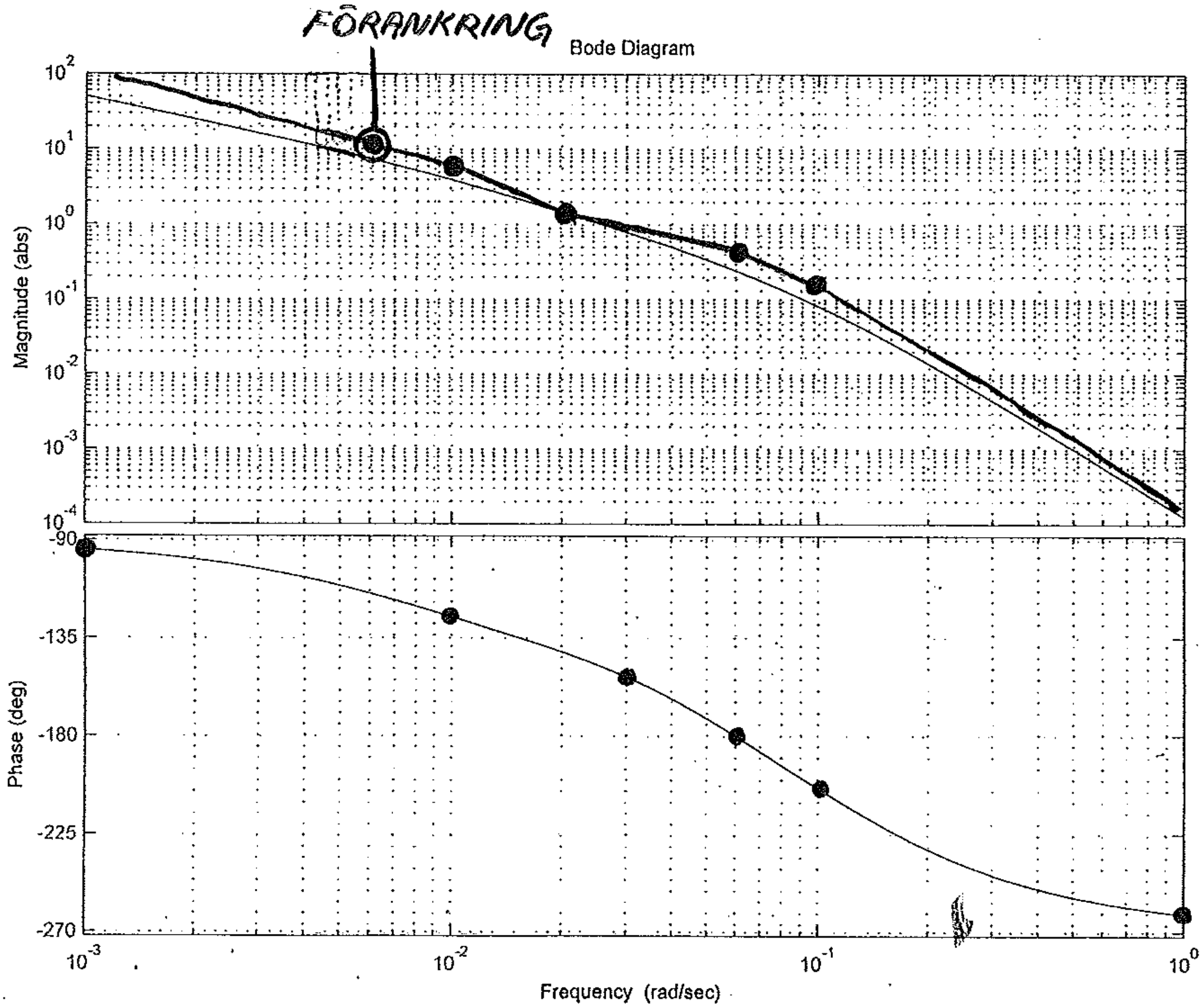
GODTYCKLIG PUNKT MELLAN FÖRSTA OCH ANDRA BRYTPUNKT.

(OM FÖRSTA BRYTPUNKTEN HADE VARIT FÖR $w > 0$, SÅ HADE JAG VALT GODTYCKLIG PUNKT MELLAN $w = 0$ OCH FÖRSTA BRYTPUNKTEN.)

$$|G_0(iw)|_{l_f} = \{ w = 0.005 \} = \frac{0.05}{0.005} = 10$$

⑦ BERÄKNA PUNKTER PÅ FASKURVA:

w	0.001	0.01	0.02	0.05	0.1	1
$\arg(G_0(iw))$	$-95°$	$-125°$	$-142°$	$-172°$	$-204°$	$-261°$



FÖRANKRING
Bode Diagram
Magnitude (abs)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)

(4,2b) K ÖKAS TILL SYSTEMET BÖRJAR OSCILLERA MED KONSTANT AMPLITUD. FÖR VILKET K SKER DETTA? VILKEN PERIOD HAR SVÄNGNINGARNA?

▨ HUR PÅVERKAR K BODE?

VET REDAN SVARET!

K PÅVERKAR ENDAST AMPLITUDKURVAN (BELOPPET), EJ FASKURVAN (VINKELN).

▨ NÄR KAN SYSTEM BÖRJA SJÄLVSVÄNGA?

VID $\omega = \omega_c$ OM $\varphi_m = 0$ OCH $A_m = 1$ (SIDA 96)

DETSAMMA SOM ATT KRÄVA ATT NYQUISTKURVAN SKÄR NEG. Re-AXELN I -1.

▨ VINKELFREKVENSER:

$|G(\omega = \omega_c)| = 1$ OCH $\arg(G(\omega = \omega_p)) = -180^\circ$

$\Rightarrow$ SJÄLVSVÄNGNING NÄR $\omega_c = \omega_p$.

FRÅN FASKURVA: VILL HA $\omega_c = 0{,}06 \ \frac{rad}{s}$

$\Rightarrow$ VILL HA $|K G_t(\omega = 0{,}06)| = 1$

FRÅN AMPLITUDKURVA: $|0{,}5 G(\omega = 0{,}06)| = 0{,}24$

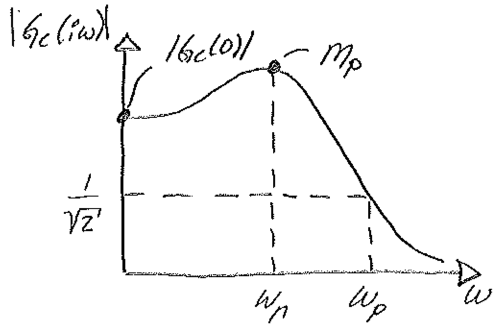
$\rightarrow |G(\omega = 0{,}06)| = 0{,}48$

$$\rightarrow |K| = \frac{1}{|G(\omega = 0{,}06)|} = \frac{1}{0{,}48} = 2{,}1$$

▨ PERIOD: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}06} = 105\,s$

BODE DIAGRAM FÖR SLUTNA SYSTEM:

(SIDA 97-98 I KURSBOK)



* STATIONÄRA VÄRDET, $|G_c(0)|$

IDEALT: $|G_c(i\omega)| = 1$, $\omega: 0 \to \infty$
ty $Y = G_c(i\omega) Y_{ref} = Y_{ref}$.

I PRAKTIKEN ÄR DETTA EJ MÖJLIGT FÖR ALLA $\omega: 0 \to \infty$.

VET ATT: $|G_c(0)| = 1$ GER INGET STATISKT FEL!

* RESONANSTOPP, M_p (HÖJD M.A.P. $|G_c(0)|$)

FÖRSTÄRKER SIGNALER MED FREKVENS ω_r EXTRA MYCKET. INTRODUCERAR SLÄNGIGT BETEENDE.

$M_p \sim \frac{1}{\zeta}$, DÄR ζ VAR DÄMPNINGSFAKTORN. (LÅGT $\zeta \Rightarrow$ DÅLIGT DÄMPAT)

* RESONANSFREKVENS, ω_r

DEN FREKVENS DÄR RESONANSTOPPEN FINNS.

* BANDBREDD, ω_B

DEN FREKVENS DÄR $|G_c(i\omega)| = 1/\sqrt{2}$.

BANDBREDDEN $\sim \frac{1}{T_r}$, DÄR T_r ÄR STIGTIDEN.

(4.4)

* STEGSVAR: B HAR STATISKT FEL.
BODE: 3 ÄR ENDA PLOT MED $|G_c(0)| > 1$.

* $B \to 3$

* STEGSVAR: C ÄR LÅNGSAMMAST. (HAR HÖGST T_r.)
BODE: 4 HAR LÄGST BANDBREDD, ω_B.

$C \to 4$

* STEGSVAR: A ÄR SNABBAST. (HAR MINST T_r.)
BODE: 2 HAR HÖGST BANDBREDD, ω_B.

$A \to 2$

* $D \to 1$

5.8a BESTÄM FÖR VILKA T SOM G_c ÄR STABIL.

- HUR PÅVERKAR EN TIDSFÖRDRÖJNING BODE? (TIDSFÖRS, 232)

  AMPLITUD: $|e^{-i\omega T}| = 1$ PÅVERKAS EJ.

  FAS: $\arg(e^{-i\omega T}) = -\omega T$ MINSKAR FASEN MED ωT

- FRÅN FIGUR:

  SKÄRFREKVENS: $\omega_c = 0.1$ rad/s

  FASMARGINAL: $\varphi_m = 40° = 0,698$ rad

- NYA FASMARGINALEN φ_m'

  STABILT OM $\varphi_m' > 0$ (ALLTSÅ $\omega_c' > -180°$)

  $\varphi_m' = \varphi_m - \omega_c T = 0,698 - 0,1T > 0$

  $\rightarrow T < 0,698$ s

EXTRA MATERIAL

SKALAD AMPLITUDKURVA	HUR MAN HITTAR A_m.
LINJÄR, $\lvert G(i\omega)\rvert$	$\log(A_m) = \log(\underline{\underline{1}}) - \log(\underline{\underline{\lvert G(\omega=\omega_p)\rvert}}) = \log\left(\frac{1}{\lvert G(\omega=\omega_p)\rvert}\right)$ $\Rightarrow A_m = \frac{1}{\lvert G(\omega=\omega_p)\rvert}$
LOGARITMISK, $\log(\lvert G(i\omega)\rvert)$	$\log(A_m) = \underline{\underline{\log(1)}} - \underline{\underline{\log(\lvert G(\omega=\omega_p)\rvert)}}$ $\Rightarrow A_m = 10^{(\log(1) - \log(\lvert G(\omega=\omega_p)\rvert))}$
DECIBEL, $20\log(\lvert G(i\omega)\rvert)$	$20\log(A_m) = \underline{\underline{20\log(1)}} - \underline{\underline{20\log(\lvert G(\omega=\omega_p)\rvert)}}$ $\Rightarrow \log(A_m) = \frac{1}{20}\left(20\log(1) - 20\log(\lvert G(\omega=\omega_p)\rvert)\right)$ $\Rightarrow A_m = 10^{\frac{1}{20}(20\log(1) - 20\log(\lvert G(\omega=\omega_p)\rvert))}$

$\underline{\underline{\quad}}$: DET VÄRDE MAN ERHÅLLER UR FIGUR.

■ MOTIVERING TILL φ_m OCH A_m:

$\underline{\varphi_m}$

BODE: AVSTÅNDET I GRADER FRÅN $\arg(G(w=w_c))$ TILL $-180°$. VET ATT $|G(w=w_c)|=1$, ENLIGT DEFINITIONEN AV w_c.

NYQUIST: $|G(w=w_c)|=1$ SKER NÄR NYQUISTKURVAN SKÄR ENHETSCIRKELN. (DÅ ÄR JU AVSTÅNDET TILL ORIGO 1.)

$\arg(G(iw)) = -180°$ SKER NÄR NYQUISTKURVAN SKÄR NEG. RE-AXELN. (DÅ ÄR JU $G(iw)$ ETT NEG. REELLT VÄRDE, SÅDANA HAR ALLTID ARGUMENTET $-180°$.)

FÖLJAKTLIGEN AVLÄSES φ_m SOM VINKELN MELLAN NEG. RE-AXELN OCH DEN PUNKT DÄR NYQUISTKURVAN SKÄR ENHETSCIRKELN.

$\underline{A_m}$

BODE: DET LOGARITMISKA AVSTÅNDET FRÅN $|G(w=w_p)|$ TILL 1.

$\rightarrow \log(A_m) = \log(1) - \log(|G(w=w_p)|)$

$\rightarrow \log(|G(w=w_p)|) = \log(1) - \log(A_m) = \log\left(\frac{1}{A_m}\right)$

$\rightarrow \log(|G(w=w_p)|) = \log\left(\frac{1}{A_m}\right)$

DET "VANLIGA" AVSTÅNDET BLIR FÖLJAKTLIGEN:

$|G(w=w_p)| = \frac{1}{A_m}$

NYQUIST: VI VET FRÅN BODE ATT $|G(w=w_p)| = \frac{1}{A_m}$. DETTA ÄR EKVIVALENT MED ATT SÄGA ATT AVSTÅNDET FRÅN ORIGO TILL PUNKTEN $G(w=w_p)$ ÄR $\frac{1}{A_m}$.

VET ATT $\arg(G(w=w_p)) = -180°$, ENLIGT DEFINITIONEN FÖR w_p. ALLTSÅ ÄR PUNKTEN $G(w=w_p)$ DEN PUNKT DÄR NYQUISTKURVAN SKÄR NEG. RE-AXELN.

FÖLJAKTLIGEN AVLÄSES $1/A_m$ SOM AVSTÅNDET MELLAN DEN PUNKT DÄR NYQUISTKURVAN SKÄR IM-AXELN OCH ORIGO.