UPPGIFT 3.14

GIVET: h_Δ : FÖRÄNDRING I NIVÅ
$q_{IN,\Delta}$: FÖRÄNDRING I INFLÖDE
$q_{OUT,\Delta}$: FÖRÄNDRING I UTFLÖDE
A : SJÖNS AREA
$q_{DAM,\Delta}$: FÖRÄNDRING I FLÖDE FRÅN DAMM
$h_{REF,\Delta}$: ÖNSKAD NIVÅFÖRÄNDRING

$$\frac{d}{dt}(Ah_\Delta) = q_{IN,\Delta} - q_{OUT,\Delta} \quad , \quad q_{OUT,\Delta} = 0 \qquad (1)$$

$$q_{DAM,\Delta} = K(h_{REF,\Delta} - h_\Delta) \qquad (2)$$

$$q_{IN,\Delta} = q_{DAM,\Delta}(t-T) \quad , \quad T = 0.5 \text{ TIMMAR} \qquad (3)$$

SÖKT: MAXIMALA STORLEKEN PÅ K/A INNAN SYSTEMET BLIR INSTABILT.

LÖSNING:

- HITTA ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN FÖR DET ÖPPNA SYSTEMET $G_0(s)$.

SYSTEMETS DYNAMIK GES AV DIFF. EKVATIONEN (1) MED INSIGNAL $q_{IN,\Delta}$ ($q_{OUT,\Delta} = 0$) OCH UTSIGNAL h_Δ.

$$(1) \rightarrow \frac{d}{dt} h_\Delta(t) = \frac{1}{A} q_{IN,\Delta}(t) = \left\{ \begin{matrix} \text{FRÅN} \\ (3) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{A} q_{DAM,\Delta}(t-T) = \left\{ \begin{matrix} \text{FRÅN} \\ (2) \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{K}{A}\left(h_{REF,\Delta}(t-T) - h_\Delta(t-T)\right)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \quad sH_\Delta(s) = \frac{K}{A} \underbrace{e^{-sT}}_{\text{LAPLACE TRANSFORM AV TIDS-FÖRSKJUTNINGEN } T.} \left(H_{REF,\Delta}(s) - H_\Delta(s)\right)$$

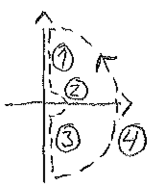
$$\rightarrow \underbrace{H_\Delta(s)}_{\text{UTSIGNAL}} = \frac{1}{s}\frac{K}{A} e^{-sT} \underbrace{\left(H_{REF,\Delta}(s) - H_\Delta(s)\right)}_{\text{REGLERFEL}} \qquad (4)$$

VI KAN FRÅN (4) IDENTIFIERA $G_0(s)$ SOM

$$G_0(s) = \frac{1}{s}\frac{K}{A} e^{-sT}$$

- RITA NYQUISTKURVAN.

VÅR KURVA γ SOM OMSLUTER HHP SER UT SOM FÖLJER:



DÄR
1. $s = i\omega$, $\omega : \infty \rightarrow 0$
2. $s = re^{i\omega}$, $\omega : \pi/2 \rightarrow -\pi/2$, $r \rightarrow 0$
3. $s = i\omega$, $\omega : 0 \rightarrow -\infty$
4. $s = Re^{i\omega}$, $\omega : -\pi/2 \rightarrow \pi/2$, $R \rightarrow \infty$

HUR SER γ' UT?

① $s = i\omega,\ \omega: \infty \to 0$

$$|G_0(i\omega)| = \left|\frac{1}{i\omega}\frac{K}{A}e^{-i\omega T}\right| = \left|\frac{1}{i\omega}\right|\left|\frac{K}{A}\right|\underbrace{\left|e^{-i\omega T}\right|}_{=1} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{K}{A},\ \omega: \infty \to 0 \quad (1a)$$

$$\arg(G_0(i\omega)) = \arg\left(\frac{1}{i\omega}\frac{K}{A}e^{-i\omega T}\right) = \underbrace{\arg(1)}_{=0} - \underbrace{\arg(i\omega)}_{=\pi/2} + \underbrace{\arg\left(\frac{K}{A}\right)}_{=0} + \underbrace{\arg\left(e^{-i\omega T}\right)}_{=-\omega T} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \omega T,\ \omega: \infty \to 0 \quad (1b)$$

③ $s = i\omega,\ \omega: 0 \to -\infty$

PÅ SAMMA SÄTT SOM I ① FÅS:

+ I.O.M. $\arg(i\omega)$ FÖR $\omega<0$ ÄR $-\frac{\pi}{2}$

$$|G_0(i\omega)| = \frac{1}{|\omega|}\cdot\frac{K}{A},\ \omega: 0 \to -\infty \quad (3a) \quad \text{OCH} \quad \arg(G_0(i\omega)) = +\frac{\pi}{2} - \omega T \quad (3b),\ \omega: 0 \to -\infty$$

② $s = re^{i\omega},\ \omega: \pi/2 \to -\pi/2,\ r \to 0$

$$G_0(re^{i\omega}) = \frac{1}{re^{i\omega}}\frac{K}{A}\exp\left(-re^{i\omega}T\right) \approx \left\{\begin{array}{l}\text{I.O.M. } r\to 0 \text{ SÅ}\\ \exp(-re^{i\omega}T) \to 1\end{array}\right\} \approx \frac{1}{re^{i\omega}}\frac{K}{A} =$$

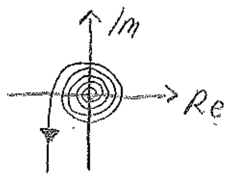
$$= \frac{K}{A}\frac{1}{r}e^{-i\omega},\ r \to 0,\ \omega: \pi/2 \to -\pi/2 \quad (2)$$

④ $s = Re^{i\omega},\ \omega: -\pi/2 \to \pi/2,\ R \to \infty$

$$G_0(Re^{i\omega}) = \frac{1}{Re^{i\omega}}\frac{K}{A}\exp\left(-Re^{i\omega}T\right) \xrightarrow[\text{DÅ } R\to\infty]{} 0$$

VAD SÄGER DESSA FORMLER OSS?

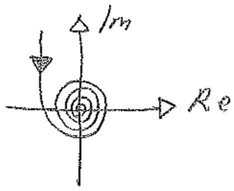
(1a): BELOPPET KOMMER BÖRJA PÅ 0 OCH VÄXA TILL ∞.
(1b): ARGUMENTET KOMMER ATT BÖRJA PÅ $-\infty$ (ALLTSÅ, FLERA VARV MEDURS) OCH GÅ MOT $-\pi/2$ (ALLTSÅ, ALLA DESSA VARV I RIKTNING MOTURS UT TILL EN LINJE PARALLELL MED NEGATIVA IM-AXELN.)



DET ÄR DETTA SOM ÄR NYQUISTKURVAN FAST MED MOTSATT RIKTNING.

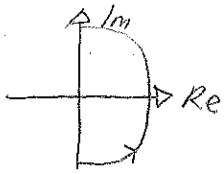
FIGUR 1.

(3a): BELOPPET KOMMER BÖRJA PÅ ∞ OCH MINSKA TILL 0.
(3b): ARGUMENTET KOMMER ATT BÖRJA PÅ $\pi/2$ (ALLTSÅ LÄNGS MED EN LINJE PARALLELL MED POSITIVA Im-AXELN.) OCH GÅ MOT ∞ (ALLTSÅ FLERA VARV MOTURS.)



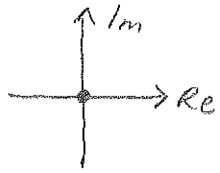
FIGUR 2.

(2): DET BLIR EN STOR HALVCIRKEL (OÄNDLIG RADIE) SOM GÅR FRÅN $-\pi/2 \Rightarrow \pi/2$.



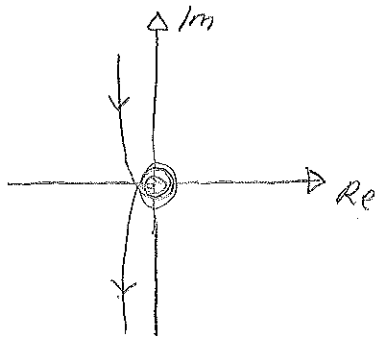
FIGUR 3.

(4): STORA HALVCIRKELN I γ AVBILDAS PÅ ORIGO.

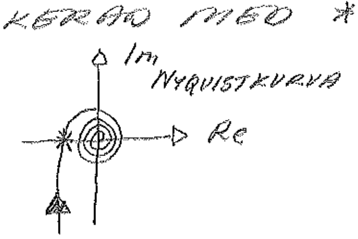


FIGUR 4.

LÄGGER VI IHOP DE FYRA FIGURERNA SÅ FÅR VI



UR STABILITETS SYNPUNKT SÅ KAN VI ANVÄNDA DET FÖRENKLADE NYQUISTKRITERIET, I.O.M. $G_0(S)$ HAR INGA POLER STRIKT I HHP. DEN KRITISKA PUNKTEN VID ÄNDRING AV K ÄR MARKERAD MED *:



FRÅGAN ÄR ALLTSÅ, NÄR SKÄR NYQUISTKURVAN REELLA AXELN FÖRSTA GÅNGEN?

TITTAR PÅ FORMLERNA FRÅN (1) (FAST MED $w: 0 \to \infty$).

VET ATT VID KORSNING AV NEGATIVA RE-AXELN SÅ ÄR $\arg(G_0(iw)) = -\pi$. FÖLDAKTLIGEN HAR VI

$$(1b) \Rightarrow \arg(G_0(iw)) = -\frac{\pi}{2} - wT = \left\{ \begin{matrix} \text{GIVET} \\ T = 0.5 \end{matrix} \right\} = -\frac{\pi}{2} - \frac{w}{2} = -\pi \Rightarrow w = \pi$$

$$(1a) \Rightarrow \{w = \pi\} \Rightarrow |G_0(i\pi)| = \frac{1}{\pi} \frac{K}{A}$$

ALLTSÅ, FÖR ETT STABILT SYSTEM SÅ MÅSTE $|G_0(i\pi)| = \frac{1}{\pi}\frac{K}{A} < 1$. ANNARS KOMMER NYQUISTKURVAN ATT HA PUNKTEN -1 TILL HÖGER $\Rightarrow$ INSTABILT.