ÖVNING 1

TEORI

* OH 1

EXEMPEL: FARTHÅLLARE PÅ EN BIL.

- SIGNALER: UTSIGNAL, $y(t)$ – DET VI VILL STYRA
  EX. HASTIGHET
  INSIGNAL, $u(t)$ – DET VI KAN STYRA
  (STYRSIGNAL) EX. DRAGKRAFT
  STÖRSIGNAL, $v(t)$ – DET VI INTE KAN STYRA
  EX. VÄGENS LUTNING

- SYSTEM: VI TITTAR PÅ DYNAMISKA SYSTEM, D.V.S. SYSTEM DÄR UTSIGNALEN BEROR PÅ INSIGNALEN BAKÅT I TIDEN.

  SÅDANA SYSTEM KAN BESKRIVAS MED DIFFERENTIALEKVATIONER.

  PROBLEM: DIFF. EKVATIONER KAN VARA SVÅRA ATT LÖSA.

  LÖSNING: LAPLACETRANSFORMERA

* TAVLA

DYNAMISKT SYSTEM: $$\frac{dy(t)}{dt} = -a\,y(t) + u(t) \quad (1)$$

* OH 2

- LAPLACETRANSFORM: DEFINITION

$$\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = Y(s)$$

  TIDSDOMÄN: SMÅ BOKSTÄVER, t
  LAPLACEDOMÄN: STORA BOKSTÄVER, s

- ÖVERFÖRINGSFUNKTION: FUNKTION SOM "ÖVERFÖR" EN SIGNAL TILL EN ANNAN I LAPLACEDOMÄNEN.

  EXEMPEL: $Y(s) = G(s)\,U(s)$

  $G(s)$ ÄR EN ÖVERFÖRINGSFUNKTION.

* TAVLA

ANTA $y(0)=0$, (1).

$\mathcal{L} \rightarrow sY(s) = -aY(s) + U(s)$.

LÖSER UT $Y(s)$: $Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s+a}}_{G(s),\ \text{ÖVERFÖRINGSFUNKTION}} U(s)$ (2).

* FORTFARANDE OH 2

POLER: DE s DÄR NÄMNAREN I $G(s)$ ÄR 0.
POLER ÄR VIKTIGA FÖR SYSTEMETS DYNAMIK OCH STABILITET.

- POLER STRIKT I VHP $\Leftrightarrow$ INSIGNAL-UTSIGNALSTABILT (SIDA 33-34 I KURSBOK)

- POLER STRIKT I HHP $\Leftrightarrow$ INSTABILT SYSTEM

* TAVLA

FRÅN (2): $s+a=0 \Rightarrow s=-a \Rightarrow$ EN POL I $-a$.

* OH 3

- POLER LÄNGRE FRÅN ORIGO $\Leftrightarrow$ SNABBARE SYSTEM

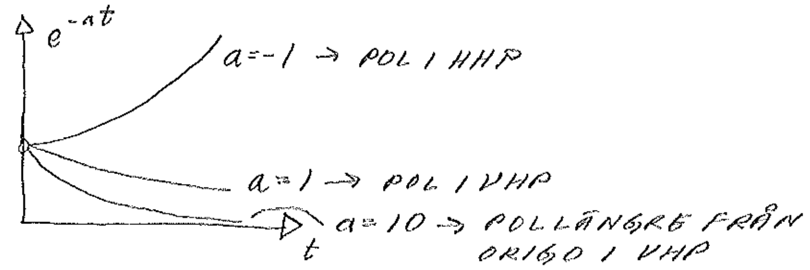
- POLER MED NOLLSKILD IMAGINÄRDEL (S.K. KOMPLEXA POLER) $\Leftrightarrow$ SVÄNGIGT SYSTEM

* TAVLA

o LÖS (1) DIREKT I TIDSDOMÄNEN:

ANTAG $u(t)=0$ FÖR ALLA t.

$y(t) = e^{-at}$



- Låt $G(s) = \frac{1}{s+bi}\,\frac{1}{s-bi} = \frac{1}{s^2+b^2}$

  och $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2+b^2}\,U(s)$

  $\rightarrow \quad (s^2+b^2)Y(s) = U(s)$

  $\mathcal{L}^{-1} \rightarrow \quad \ddot{y}(t) + b^2 y(t) = u(t)$

  Antag $u(t) = 0$ för alla t.

  $y(t) = e^{ibt} + e^{-ibt} = 2\cos(bt) \leftarrow$ svänger

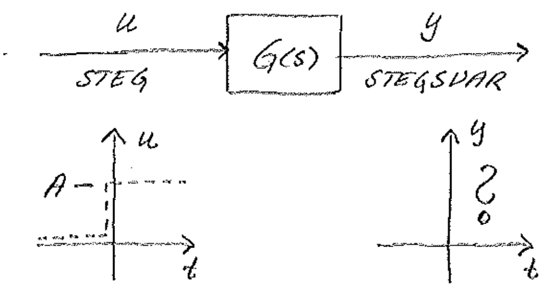
* Fortfarande OH3

Nollställen: De s där täljaren i $G(s)$ är 0. Nollställen är viktiga för systemets <u>transienta</u> egenskaper, dvs. hur systemet reagerar på en ändring i insignalen.

Nollställen avgör EJ stabilitet!

* OH 4

Stegsvar:



$\text{Steg} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ A, & t \geq 0. \end{cases}$

$\mathcal{L}(\text{steg}) = \frac{A}{s}$

Slutvärdessatsen: Hur ett <u>stabilt</u> system beter sig då $t \to \infty$.

- Om alla nollskilda poler till $Y(s)$ har strikt negativ realdel så gäller

  $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s).$$

Bra: Vi kan räkna ut $y(\infty)$ utan att använda $\mathcal{L}^{-1}$.

* OH5

- STATISKA FÖRSTÄRKNINGEN: DEFINITION

  STATISK FÖRSTÄRKNING $= |G(0)|$.

  DETTA ÄR FÖRSTÄRKNINGEN AV EN KONSTANT SIGNAL.

  (MOTIVERING, SIDA 82 I KURSBOK.)

- BEGYNNELSEVÄRDESSATSEN: $- \lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to \infty} sY(s)$.

UPPGIFTER

2.5 PARA IHOP POLNOLSTÄLLEDIAGRAM MED RÄTT STEGSVAR.

ISTÄLLET FÖR $G(s)$ SÅ FÅR VI DESS POLER OCH NOLLSTÄLLEN GRAFISKT.

O – NOLLSTÄLLEN
X – POLER

STABILITET:

STEGSVAR: 1, 2, 4, 5 ÄR STABILA. $y(t)$ KONVERGERAR.

3, 6 ÄR INSTABILA. $y(t)$ DIVERGERAR.

DIAGRAM: A, C, E, F ÄR INSIGNAL-UTSIGNAL [redacted] STABILA.
POLERNA HAR STRIKT NEGATIV REALDEL.

B, D ÄR EJ INSIGNAL-UTSIGNAL [redacted] STABILA.
DET FINNS POL MED REALDEL = 0.

$\Rightarrow$ A, C, E, F $\rightarrow$ 1, 2, 4, 5

B, D $\rightarrow$ 3, 6

SKILJA B, D $\rightarrow$ 3, 6:

DIAGRAM: B HAR EN POL OCH DEN ÄR 0. VAD INNEBÄR DETTA?

$$G_B = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}U(s) \rightarrow sY(s) = U(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow \dot{y}(t) = u(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \rightarrow \dot{y}(t) = 1 \quad t \geq 0$$

ALLTSÅ $y(t)$ HAR KONSTANT LUTNING.

STEGSVAR: AV 3 OCH 6 SÅ ÄR DET I 6 SOM $y(t)$ HAR KONSTANT LUTNING.

$\Rightarrow$ B $\rightarrow$ 6 OCH D $\rightarrow$ 3

KOMPLEXA POLER:

DIAGRAM: F ÄR ENDA SYSTEMET MED KOMPLEXA POLER.
KOMPLEXA POLER $\rightarrow$ SVÄNGIGT SYSTEM.

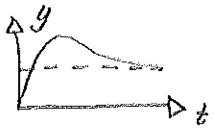
STEGSVAR: 4 ÄR ENDA STEGSVARET MED SVÄNGNINGAR.

$\Rightarrow$ F $\rightarrow$ 4

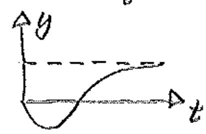
NOLLSTÄLLEN:

DIAGRAM: A, E HAR SAMMA POLER MEN OLIKA NOLLSTÄLLEN

* NOLLSTÄLLEN KAN GE ÖVERSLÄNG



* NOLLSTÄLLEN I HHP KAN GE UNDERSLÄNG (SIDA 119 KURSBOK)



* VAD INNEBÄR NOLLSTÄLLE I ORIGO?

A HAR ETT NOLLSTÄLLE I ORIGO OCH TVÅ REELLA POLER $\rightarrow G_A(s) = \frac{s}{(s+a)(s+b)}$

SLUTVÄRDESSATSEN: SYSTEMET ÄR STABILT!

$$\lim_{t\to\infty} y_A(t) = \lim_{s\to 0} s Y_A(s)$$

$$Y_A(s) = G_A(s)U(s) \quad \text{DÄR} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

(STEG)

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y_A(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{s}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{s} = 0$$

STEGSVAR: ENDAST 2 HAR ETT $y(t)$ SOM KONVERGERAR MOT 0.

$\Rightarrow A \rightarrow 2$

SKILJA PÅ C, E OCH 1, 5

C OCH E HAR SAMMA POLER MEN ENDAST E HAR ETT NOLLSTÄLLE.

$$\rightarrow G_C(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \Rightarrow Y_C(s) = G_C(s)U(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{s}$$

STEGSVAR I TIDSDOMÄNEN:

FRÅN TABELL I KURSBOK $\Rightarrow y_C(t) = \frac{1}{ab}\left(1 - \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{b-a}\right)$

LÅT UNDERSÖKA NÄR/OM y_C HAR EN MAX. PUNKT.

$$y_C'(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} = 0 \Rightarrow e^{-at} = e^{-bt} \Rightarrow 1 = e^{(a-b)t}$$

$\Rightarrow 0 = (a-b)t \Rightarrow$ EFTERSOM $a \neq b$ SÅ ÄR $t = 0$.

SLUTSATS: $y_C(t)$ HAR INGEN ÖVERSLÄNG.

STEGSVAR: 5 HAR ÖVERSLÅNG OCH 1 SAKNAR ÖVERSLÅNG.

$\Rightarrow$ $C \Rightarrow 1$
$E \Rightarrow 5$

2.10 PARA IHOP ÖVERFÖRINGSFUNKTIONER MED STEGSVAR.

- STABILITET:

STEGSVAR: ALLA STEGSVAR ÄR STABILA. $y(t)$ KONVERGERAR.

G: FINNS DET NÅGOT G MED POLER VARS REALDEL ÄR STÖRRE ELLER LIKA MED NOLL?

G_6 HAR POLER MED POSITIV REALDEL. EJ INSIGNAL-UTSIGNAL STABILT.

$\Rightarrow \cancel{G_6}$ (STRYK PÅ OVER-HEAD)

- STATISK FÖRSTÄRKNING, $|G(0)|$:

STEGSVAR: (TITTA PÅ STORLEKEN PÅ SLUTVÄRDET.)

B OCH D HAR DUBBELT SÅ STORT SLUTVÄRDE SOM A OCH C. $\rightarrow |G_B(0)| = |G_D(0)| = 2|G_A(0)| = 2|G_C(0)|$

G: ENDAST G_1, G_3, G_4, G_5 KAN UPPFYLLA DETTA.

$\Rightarrow \cancel{G_2}, \quad G_1, G_4 \rightarrow A, C, \quad G_3, G_5 \rightarrow B, D$

- SKILJA PÅ $G_1, G_4 \rightarrow A, C$:

STEGSVAR: C SVÄNGER, A SVÄNGER INTE

G: BÅDE G_1 OCH G_4 HAR KOMPLEXA POLER. * TITTA ISTÄLLET PÅ HUR <u>DÄMPAT</u> SYSTEMET ÄR, ALLTSÅ PÅ KVOTEN

$$K = \frac{|\text{Im-DEL AV POL}|}{|\text{Re-DEL AV POL}|}$$

OM $K \gg 1$, ALLTSÅ $|\text{Im-DEL}| \gg |\text{Re-DEL}|$ DÅ ÄR SYSTEMET DÅLIGT DÄMPAT → DET SVÄNGER.

ANNARS SÅ ÄR SYSTEMET BRA DÄMPAT → DET SVÄNGER EJ.

G_1 ÄR DÅLIGT DÄMPAT, $K = 10$.

G_4 ÄR BÄTTRE DÄMPAT, POLEN I -2 DOMINERAR OCH GER $K = 0$

$\Rightarrow G_1 \rightarrow C$ OCH $G_4 \rightarrow A$

- SKILJA PÅ $G_3, G_5 \rightarrow B, D$:

STEGSVAR: B HAR ÖVERSLÄNG OCH ÄR SNABBARE ÄN D.

G: ÖVERSLÄNG KAN INNEBÄRA NOLLSTÄLLEN MEN EJ SÄKERT! JÄMFÖR ISTÄLLET SNABBHET.

G_3 HAR POLER LÄNGRE IFRÅN ORIGO ÄN G_5 $\Rightarrow$
G_3 ÄR SNABBARE ÄN G_5.

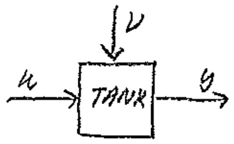
$\Rightarrow$ $G_3 \rightarrow B$, $G_5 \rightarrow D$

2.11a

- Utsignal $y(t)$ - Det vi vill styra → pH-värdet i utflödet
- Störning $v(t)$ - Det vi inte kan styra → Inflödet av syra
- Insignal $u(t)$ - Det vi kan styra → Inflödet av NaOH

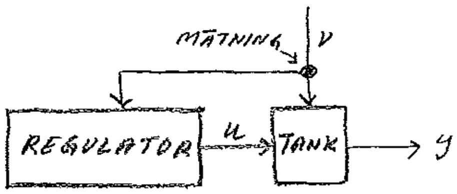
2.11b

- Blockschema utan reglering:



- Om vi kan mäta v så kan vi använda <u>framkoppling</u>:

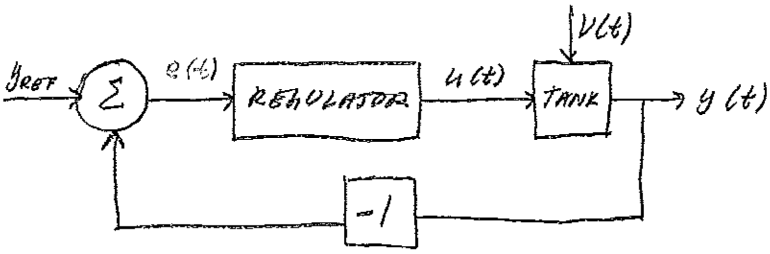
OMTID →



+ Reagerar snabbare
- Måste kunna mäta v
- Känslig för modellfel

- Annars så använder vi oss av <u>negativ återkoppling</u>:

Då använder vi ytterligare en signal: Referenssignal. Det är här <u>önskat</u> pH-värde i utflödet, y_{ref}



+ Behöver inte mäta v
+ Kan stabilisera instabila system
- Långsammare
- Känsligt för brus i $y(t)$

EXTRA MATERIAL TILL UPPGIFT 2.5.

STEGSVAR FÖR SYSTEM MED ETT NOLLSTÄLLE OCH TVÅ REELLA POLER STRIKT I VHP.

ÖVERFÖRINGSFUNKTION: $G(s) = \frac{s+c}{(s+a)(s+b)}$

STEG: $U(s) = \frac{1}{s}$

STEGSVAR: $Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{s+c}{(s+a)(s+b)}\,\frac{1}{s}$

STEGSVAR I TIDSDOMÄNEN:

FRÅN TABELL I KURSBOK $\Rightarrow$ $y(t) = \frac{c}{ab}\left[1 - \frac{b(c-a)e^{-at} - a(c-b)e^{-bt}}{c(b-a)}\right]$

VID TOPPEN PÅ EN ÖVERSLÄNG SÅ KOMMER $\dot{y}(t) = 0$ SAMT VÄRDET PÅ $y(t)$ KOMMER ATT VARA STÖRRE ÄN DESS SLUTVÄRDE. LÅT OSS UNDERSÖKA DETTA.

$$\dot{y}(t) = \frac{(c-a)\,e^{-at} - (c-b)\,e^{-bt}}{b-a}$$

$$\dot{y}(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = \ln\left(\left[\frac{c-b}{c-a}\right]^{\frac{1}{b-a}}\right)$$

$$y(t^*) = \frac{c}{ab}\left[1 - \frac{1}{c(b-a)}\left[b(c-a)\left[\frac{c-b}{c-a}\right]^{\frac{-a}{b-a}} - a(c-b)\left[\frac{c-b}{c-a}\right]^{\frac{-b}{b-a}}\right]\right]$$

$$y(\infty) = \frac{c}{ab}$$

OM VÄRDET PÅ $y(t^*) > y(\infty)$ SÅ HAR VI EN ÖVERSLÄNG. DETTA BEROR PÅ VILKA VÄRDEN a, b OCH c HAR.