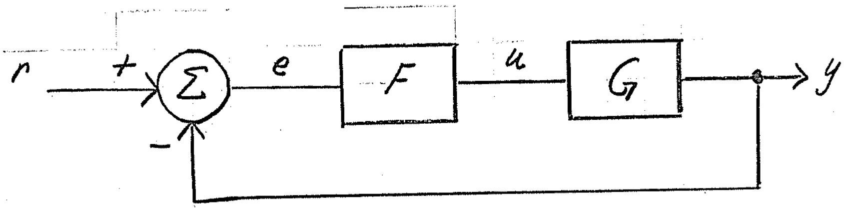
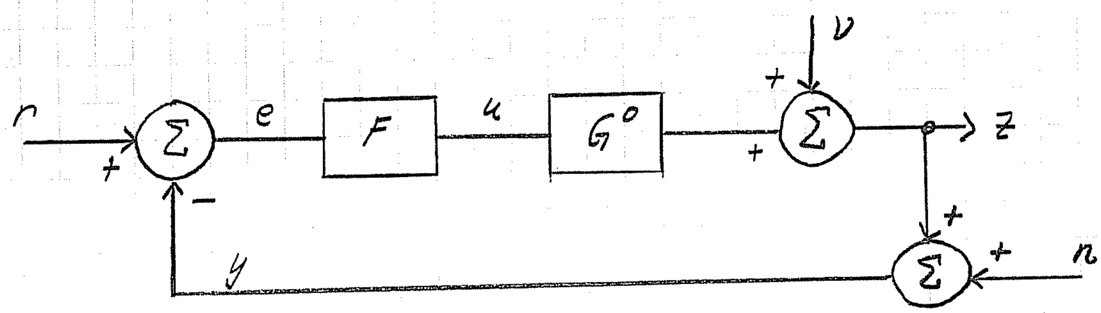
TEORI

VAD GER SÄMRE PRESTANDA HOS VÅRT SYSTEM?

- VÅR MODELL:



- VERKLIGA SYSTEMET:



STÖRSIGNAL v OCH MODELLFEL:

- VI TROR ATT $Y(s) = G(s)\,U(s)$.
- EGENTLIGEN HAR SYSTEMET ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN G^0 OCH EGENTLIGEN LÄGGS EN STÖRSIGNAL v TILL UTSIGNALEN.

$$\Rightarrow Z(s) = G^0(s)\,U(s) + V(s)$$

MÄTFEL n:

- VI BENÄMNER DEN SIGNAL SOM VI MÄTER MED y.
- VI BENÄMNER SYSTEMETS VERKLIGA UTSIGNAL MED z.
- VI TROR ATT $Y(s) = Z(s)$ (PERFEKT MÄTNING)

EGENTLIGEN SÅ PÅVERKAS MÄTNINGEN AV MÄTBRUS n.

$$\Rightarrow Y(s) = Z(s) + N(s)$$

BEGRÄNSAD INSIGNAL u:

- DET FINNS FYSIKALISKA/TEKNISKA BEGRÄNSNINGAR FÖR HUR STORA INSIGNALER VI KAN GENERERA.

(FRÅN TIDIGARE) KÄNSLIGHETSFUNKTIONEN $S(s)$

- $S(s)$ ÄR ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN FRÅN v TILL y.

$$S(s) = \frac{1}{1+GF} = \frac{1}{1+G_0}$$

- FÖR ATT MINSKA STÖRNINGEN v:S PÅVERKAN PÅ y SÅ KRÄVS ETT LITET $S(s)$, ALLTSÅ ETT STORT $G_0(s)$.

KOMPLEMENTÄRA KÄNSLIGHETSFUNKTIONEN $T(s)$

- $T(s)$ ÄR ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN FRÅN n TILL z MED OMVÄNT TECKEN.

"GÅ" I BLOCKSCHEMAT:

$$Z(s) = G(s)U(s) + V(s)$$
$$U(s) = F(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - Y(s)$$
$$Y(s) = Z(s) + N(s)$$

$$\Rightarrow \quad Z(s) = G(s)\big(F(s)(R(s) - Z(s) - N(s))\big) + V(s) =$$
$$= G(s)F(s)R(s) - G(s)F(s)Z(s) - G(s)F(s)N(s) + V(s)$$

BRYT UT $Z(s)$: $$Z(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}}_{G_c(s)} R(s) - \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}}_{T(s)} N(s) + \underbrace{\frac{1}{1+G(s)F(s)}}_{S(s)} V(s)$$

SÄTT $R(s) = V(s) = 0$: $$Z(s) = -\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} N(s)$$

- $T(s) = \dfrac{GF}{1+GF} = G_c$

- FÖR ATT MINSKA MÄTBRUSET n:S PÅVERKAN PÅ z SÅ KRÄVS ETT LITET $T(s)$.

RELATIONEN MELLAN $S(s)$ OCH $T(s)$:

$$\boxed{S(s) + T(s) = 1}$$

- VI MÅSTE ALLTSÅ PRIORITERA MELLAN STÖRNINGARS INVERKAN OCH MÄTBRUSETS INVERKAN.

ROBUSTHET

- ROBUSTHET BESKRIVER ETT SYSTEMS TOLERANS MOT MODELLFEL.
- LÅT DET VERKLIGA SYSTEMET BENÄMNAS $G^0(s)$ OCH MODELLEN AV SYSTEMET BENÄMNAS $G(s)$, DÅ HAR VI

$$\boxed{G^0(s) = G(s)\,(1+\Delta_G(s))}$$

DÄR $\Delta_G(s)$ ÄR DET SÅ KALLADE RELATIVA MODELLFELET. $\Delta_G(s)$ ÄR OKÄND (ANNARS SKULLE VI KÄNNA TILL $G^0(s)$ EXAKT) MEN KAN OFTAST BEGRÄNSAS PÅ NÅGOT SÄTT.

<u>ROBUSTHETSKRITERIUM:</u> (SIDA 125)

GIVET EN ÅTERKOPPLING $F(s)$ SOM STABILISERAR EN MODELL $G(s)$. ANTAG ATT $G(s)$ OCH $G^0(s)$ HAR SAMMA ANTAL POLER I HHP SAMT ATT $F(s)G(s)$ OCH $F(s)G^0(s)$ BÅDA GÅR MOT NOLL DÅ $|s|$ GÅR MOT OÄNDLIGHETEN. DÅ ÄR DET SLUTNA SYSTEMET DÅ $G^0(s)$ ÅTERKOPPLAS MED $F(s)$ STABILT OM

$$\boxed{|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega}$$

OBSERVERA ATT KRITERIUMET ÄR ETT TILLRÄCKLIGT MEN INTE NÖDVÄNDIGT VILLKOR FÖR STABILITET. ALLTSÅ, SYSTEMET KAN VARA STABILT ÄVEN OM KRITERIUMET INTE ÄR UPPFYLLT.

TILLSTÅNDSBESKRIVNING

- HÖGRE ORDNINGENS LINJÄRA DIFF. EKVATIONER KAN SKRIVAS SOM ETT SYSTEM AV FÖRSTA ORDNINGENS DIFF. EKVATIONER.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

DÄR A, B, C, D ÄR MATRISER

$y(t)$ = UTSIGNAL

$u(t)$ = INSIGNAL

$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ ÄR SYSTEMETS TILLSTÅNDSVEKTOR OCH $x_i(t)$ ÄR SYSTEMETS TILLSTÅNDSVARIABLER.

- TILLSTÅNDSBESKRIVNING ⇒ ÖVERFÖRINGSFUNKTION

$$\boxed{G(s) = C(sI-A)^{-1}B}$$

(SIDA 162)

- ÖVERFÖRINGSFUNKTION ⇒ TILLSTÅNDSBESKRIVNING

SVÅRT. DET FINNS OÄNDLIGT MÅNGA TILLSTÅNDSBESKRIVNINGAR FÖR ETT GIVET SYSTEM. TVÅ STANDARDMETODER ÄR GIVNA I BOKEN; STYRBAR KANONISK FORM OCH OBSERVERBAR KANONISK FORM.

LINJÄRISERING

ETT SÄTT ATT APPROXIMERA OLINJÄRA FUNKTIONER MED LINJÄRA KRING EN VISS PUNKT. (TAYLORUTVECKLING)

(SIDA 155)

6.7a

TVÅ ALTERNATIV: I ANVÄND MATLAB OCH KLICKA I FIGUR.

II SÄTT $s=i\omega$ OCH SE FÖR VILKET α EKVATIONEN ÄR UPPFYLLD. SKISSA ROTORT.

OAVSETT METOD SÅ MÅSTE VI HITTA $G_c(s)$ OCH SKRIVA DESS NÄMNARE PÅ FORMEN $P(s)+\alpha Q(s)=0$.

II ∘ HITTA $G_c^0(s)$ (OBS! TITTAR PÅ DET SLUTNA VERKLIGA SYSTEMET.)

$$G_c^0(s)=\frac{F(s)G^0(s)}{1+F(s)G^0(s)}=\left\{G^0(s)=G(s)\frac{\alpha}{s+\alpha}\right\}=\frac{\frac{F(s)G(s)\alpha}{s+\alpha}}{1+\frac{F(s)G(s)\alpha}{s+\alpha}}=$$

$$=\frac{F(s)G(s)\alpha}{s+\alpha+F(s)G(s)\alpha}=\left\{\begin{array}{l}F(s)=4\\ G(s)=1/(s(s+1))\end{array}\right\}=\frac{\frac{4\alpha}{s(s+1)}}{s+\alpha+\frac{4\alpha}{s(s+1)}}=$$

$$=\frac{4\alpha}{s(s+1)(s+\alpha)+4\alpha}$$

∘ IDENTIFIERA $P(s)$ OCH $Q(s)$.

NÄMNAREN: $s(s+1)(s+\alpha)+4\alpha \leftrightarrow P(s)+\alpha Q(s)=0$

$$s^2(s+1)+\alpha s(s+1)+4\alpha \rightarrow$$

$$s^2(s+1)+\alpha\left(s(s+1)+4\right) \rightarrow$$

$$P(s)=s^2(s+1) \text{ OCH } Q(s)=s(s+1)+4$$

KOLL: grad $(P(s))=3$, grad $(Q(s))=2$, $3>2$ OK!

∘ SÄTT $s=i\omega$

$$P(i\omega)+\alpha Q(i\omega)=0 \rightarrow (i\omega)^2(i\omega+1)+\alpha\cdot i\omega(i\omega+1)+4\alpha=$$

$$-\omega^2(i\omega+1)-\alpha\omega^2+\alpha i\omega+4\alpha=$$

$$-\omega^3 i-\omega^2-\alpha\omega^2+\alpha\omega i+4\alpha=0$$

IM-DEL: $-\omega^3+\alpha\omega=0 \rightarrow \omega_1=0,\ \omega_2=\sqrt{\alpha},\ \omega_3=-\sqrt{\alpha}$

MEN $\omega>0$ SÅ VI KAN DIREKT STRYKA $\omega_3=-\sqrt{\alpha}$.

RE-DEL: $-\omega^2-\alpha\omega^2+4\alpha=0 \rightarrow -\omega^2(1+\alpha)+4\alpha=0 \rightarrow$

$$\omega^2=\frac{4\alpha}{1+\alpha} \rightarrow \omega_1=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}},\ \omega_2=\frac{-2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$$

MEN $\omega\geq 0$ SÅ STRYK ω_2

VET NU ATT $w = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$ (1) (FRÅN RE-DEL.)

VI KAN HITTA α GENOM ATT KOLLA DÅ $w=0$ OCH $w=\sqrt{\alpha}$.

(FRÅN Im-DEL).

$w=0$ i (1) $\rightarrow$ $\alpha=0$ $\Rightarrow$ EN STARTPUNKT ($\alpha=0$) I ROTORTEN LIGGER I ORIGO ($w=0$).

$w=\sqrt{\alpha}$ i (1) $\Rightarrow$ $\sqrt{\alpha} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}$ $\rightarrow$ $1 = \frac{2}{\sqrt{1+\alpha}}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{1+\alpha} = 2$

$\Rightarrow$ $1+\alpha = 4$ $\rightarrow$ $\alpha = 3$

$\Rightarrow$ Im-AXELN KORSAS DÅ $\alpha=3$ VID $s = \pm i\sqrt{3}$.

- FRÅN SKISS AV ROTORT KAN VI NU SE ATT DET STÄNGDA SYSTEMET ÄR ASYMPTOTISKT STABILT FÖR $\alpha>3$. DÅ LIGGER G_c:S POLER STRIKT I HHP.

6.7b

- ROBUSTHETSKRITERIUM PÅ SIDA 125.

KAN VI ANVÄNDA KRITERIET?

- G OCH G^0 SKA HA SAMMA # POLER I HHP.

POLER TILL G: $G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow s_1 = 0,\ s_2 = -1$

POLER TILL G^0: $G^0(s) = G(s)\frac{\alpha}{s+\alpha} = \frac{1}{s(s+1)}\frac{\alpha}{s+\alpha},\ \alpha > 0,\ \rightarrow s_1 = 0,\ s_2 = -1$

$s_3 = -\alpha < 0$

$\Rightarrow$ G OCH G^0 HAR SAMMA # POLER I HHP.

- $F(s)G(s)$ OCH $F(s)G^0(s)$ SKA GÅ MOT 0 DÅ $|s| \rightarrow \infty$.

$F(s)G(s) = \frac{4}{s(s+1)} \rightarrow 0$ DÅ $|s| \rightarrow \infty$

$F(s)G^0(s) = \frac{4}{s(s+1)}\frac{\alpha}{s+\alpha} \rightarrow 0$ DÅ $|s| \rightarrow \infty$

OK!

- KRITERIUM: OM $G_0(s)$ ÅTERKOPPLAS MED $F(s)$ SÅ BLIR $G_c(s)$ STABILT OM

$$|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega$$

- HITTA Δ_G

VET ATT: $G^0(s) = G(s)(1+\Delta_G(s))$

$G^0(s) = G(s)\frac{\alpha}{s+\alpha} = G(s)\left(1 - 1 + \frac{\alpha}{s+\alpha}\right) = G(s)\left(1 + \left(-1 + \frac{\alpha}{s+\alpha}\right)\right)$

IDENTIFIERAR $\Delta_G(s)$: $\Delta_G(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} - 1 = \frac{\alpha - s - \alpha}{s+\alpha} = \frac{-s}{s+\alpha}$

- HITTA T

VET ATT: $T = G_c$, ALLTSÅ HAR VI BODEPLOTT FÖR $|T(i\omega)|$.

- INVERTERAT KRITERIUM: $|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \quad \forall \omega$

FÖR VILKA α LIGGER $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|}$ OVANFÖR KURVAN $|T(i\omega)|$ $\forall \omega$?

∘ HAR ATT $\frac{1}{\Delta_G(s)} = \frac{s+\alpha}{-s}$. VAD VET VI OM BODE FÖR $\frac{1}{\Delta_G(s)}$?

BODEANALYS ("SKISSA BODE"-TANK):

* FAKTORISERA: $\frac{1}{\Delta_G(s)} = \frac{1+s/\alpha}{-s/\alpha}$

* LÅGFREKVENSASYMPTOT: $\lim_{s\to 0} \frac{s+\alpha}{-s} = \frac{-\alpha}{s} \Rightarrow \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|_{lf}} = \frac{\alpha}{\omega}$

* HÖGFREKVENSASYMPTOT: $\lim_{s\to\infty} \frac{s+\alpha}{-s} = -1 \Rightarrow \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|_{hf}} = 1$

* BRYTPUNKTER:

PUNKT	0	α
TYP	POL	NOLL
BIDRAG	-1	+1
LUTNING	-1	0

VI VET ALLTSÅ ATT $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|}$ BÖRJAR I ∞ MED LUTNING -1. RUNT $\omega=\alpha$ SÅ ÖVERGÅR LUTNINGEN MOT 0 OCH $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|}$ KONVERGERAR MOT 1.

$\Rightarrow$ KRITERIET ÄR UPPFYLLT OM $\frac{1}{|\Delta_G(i\omega_{TOPP})|} > |T(i\omega_{TOPP})|$.

UR BODE: $\omega_{TOPP} = 2$ OCH $|T(i\omega_{TOPP})| = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{|\Delta_G(i2)|} > 2 \Rightarrow \left|\frac{2i+\alpha}{2i}\right| > 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{2} > 2 \Rightarrow \alpha > \sqrt{12} > 3$

6.7c KRITERIET GAV ETT STÖRRE α ÄN VAD ROTORTEN GJORDE.

VARFÖR?

ROBUSHETSKRITERIET ÄR ETT TILLRÄCKLIGT VILLKOR FÖR STABILITET.

ROTORTEN VISAR NÄR POLERNA LIGGER STRIKT I VHP, DETTA ÄR ETT TILLRÄCKLIGT OCH NÖDVÄNDIGT VILLKOR.

8.2

GIVET: SYSTEMBESKRIVNING: $l\ddot{\theta} + g\sin\theta + \ddot{z}\cos\theta = 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$ (TILLSTÅND)

$$u = \ddot{z}/l$$ (INSIGNAL)

$$y = \theta$$ (UTSIGNAL)

$$\omega_0^2 = g/l$$

VI SKA LINJÄRISERA KRING JÄMVIKTSPUNKTEN

$$x = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ DÅ } u = 0.$$ (FÖR "RECEPT", SE SIDA 155.)

① OLINJÄR TILLSTÅNDSFORM:

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta + \ddot{z}\cos\theta = 0 \Leftrightarrow l\dot{x}_2 + g\sin x_1 + lu\cos x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2 + \frac{g}{l}\sin x_1 + u\cos x_1 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \triangleq f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - u\cos x_1 \triangleq f_2(x,u) \\ y = x_1 \triangleq h(x,u) \end{cases}$$

② JÄMVIKTSPUNKTEN: (REDAN GIVEN HÄR.)

$$x_0 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 = 0, \quad y_0 = \pi$$

KOLL: $f_1(x_0,u_0) = x_{2,0} = 0$ OK!

$f_2(x_0,u_0) = -\frac{g}{l}\sin x_{1,0} - u_0\cos x_{1,0} = -0-0=0$ OK!

$h(x_0,u_0) = x_{1,0} = \pi = y_0$ OK!

③ SMÅ AVVIKELSER:

$$x = x_0 + \Delta x = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta x$$

$$u = u_0 + \Delta u = \Delta u$$

④ JACOBIANERNA:

- $A = f_x(x_0,u_0)$

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \end{bmatrix}$$

$$f_x(x,u) = \begin{bmatrix} f_{1,x_1}(x,u) & f_{1,x_2}(x,u) \\ f_{2,x_1}(x,u) & f_{2,x_2}(x,u) \end{bmatrix}$$

$$f_{1,x_1}(x,u) = \frac{d}{dx_1}(x_2) = 0$$

$$f_{1,x_2}(x,u) = \frac{d}{dx_2}(x_2) = 1$$

$$f_{2,x_1}(x,u) = \frac{d}{dx_1}\left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - u\cos x_1\right) = -\frac{g}{l}\cos x_1 + u\sin x_1$$

$$f_{2,x_2}(x,u) = \frac{d}{dx_2}\left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - u\cos x_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow f_x(x,u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 + u\sin x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_x(x_0,u_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- $B = f_u(x_0, u_0)$

$$f_u(x,u) = \begin{bmatrix} f_{1,u}(x,u) \\ f_{2,u}(x,u) \end{bmatrix}$$

$$f_{1,u}(x,u) = \frac{d}{du}(x_2) = 0$$

$$f_{2,u}(x,u) = \frac{d}{du}\left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - u\cos x_1\right) = -\cos x_1$$

$$\Rightarrow f_u(x,u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos x_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_u(x_0,u_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $C = h_x(x_0, u_0)$

$$h(x,u) = x_1$$

$$h_x(x,u) = [\, h_{x_1}(x,u) \quad h_{x_2}(x,u) \,]$$

$$h_{x_1}(x,u) = \frac{d}{dx_1}(x_1) = 1$$

$$h_{x_2}(x,u) = \frac{d}{dx_2}(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow h_x(x,u) = [1 \quad 0]$$

$$\Rightarrow h_x(x_0,u_0) = [1 \quad 0]$$

∘ $D = h_u(x_0, u_0)$

$h_u(x,u) = h_u(x,u)$ (BLIR HÄR EN SKALÄR.)

$h_u(x,u) = \frac{d}{du}(x_1) = 0$

$\Rightarrow h_u(x,u) = 0$

$\Rightarrow h_u(x_0, u_0) = 0$

⑤ LINJÄRISERADE EKVATIONEN

$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$

$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

(8.3)

- BESKRIV SYSTEMET PÅ TILLSTÅNDSFORM.
- INSIGNAL: $u = \begin{bmatrix} i \\ M_1 \end{bmatrix}$ (GIVET)

UTSIGNAL: y (GIVET)

- VILL SKRIVA SYSTEMET PÅ FORMEN:

$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$

(1) VÄLJ TILLSTÅND:

DE KAN VÄLJAS PÅ OLIKA SÄTT.

TIPS: VÄLJ SIGNALER EFTER EN INTEGRATOR $\frac{1}{s}$ SOM TILLSTÅND. DET GER 1:A ORDNINGENS DIFF. EKVATIONER FÖR TILLSTÅNDEN.

TITT I BLOCKSCHEMAT GER: $x_1 = y$, $x_2 = \theta$, $x_3 = z$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ z \end{bmatrix}$$

(2) UTTRYCK FÖR TILLSTÅNDEN:

BLOCKSCHEMAT GER UTTRYCK FÖR TILLSTÅNDEN SOM FUNKTIONER AV ANDRA TILLSTÅND OCH INSIGNALER.

"GÅ" I BLOCKSCHEMAT:

$$X_1(s) = Y(s) = \frac{1}{s}\left(M_1(s) + K_2\,\Theta(s)\right) = \frac{1}{s}\left(M_1(s) + K_2\,X_2(s)\right)$$

$$X_2(s) = \Theta(s) = \frac{1}{s}\left(Z(s) - Y(s)\right) = \frac{1}{s}\left(X_3(s) - X_1(s)\right)$$

$$X_3(s) = Z(s) = \frac{1}{s}\left(M_i(s) - M_a(s)\right) = \frac{1}{s}\left(K_1 I(s) - K_2\,\Theta(s)\right) = \frac{1}{s}\left(K_1 I(s) - K_2\,X_2(s)\right)$$

(3) HITTA TIDSDERIVATAN AV TILLSTÅNDEN:

MULTIPLICERA MED s:

$$s\,X_1(s) = M_1(s) + K_2\,X_2(s) \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = M_1(t) + K_2\,x_2(t)$$

$$s\,X_2(s) = X_3(s) - X_1(s) \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t) - x_1(t)$$

$$s\,X_3(s) = K_I\,I(s) - K_2 X_2(s) \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \quad \dot{x}_3(t) = K_I\,i(t) - K_2\,x_2(t)$$

④ SKRIV PÅ ÖNSKAD MATRISFORM:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ K_T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ m_1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

8.6

- FÖLJER RESULTATET PÅ SIDA 162.
- IDENTIFIERA A, B, C, D:

$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [-1 \ \ 2]$, $D = 0$

- FORMEL (8.15) $\Rightarrow$

$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ (I = IDENTITETSMATRISEN)

$$= (-1 \ \ 2)\left[s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0$$

$$= (-1 \ \ 2)\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{SE BETA FÖR} \\ \text{INVERS AV} \\ 2\times 2 \text{ MATRIS} \end{matrix} \right\} =$$

$$= (-1 \ \ 2)\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)}(-1 \ \ 2)\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)}(-s-3 \quad -1+2s+4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)}(-s-3-1+2s+4) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$$

8.4a

Skriv $\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y = 6u$ på tillståndsform.

3:e ordningens diff.ekv. $\Rightarrow$ 3 tillstånd, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

① Välj tillstånd

$x_1(t) = y$, $x_2(t) = \dot{y}$, $x_3(t) = \ddot{y}$

② Uttryck för tillstånden

(Som ovan)

③ Hitta tidsderivatan för tillstånden

$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$

$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t)$

$\dot{x}_3(t) = \dddot{y}(t) = \{\text{från ovan}\} = -6\ddot{y}(t) - 11\dot{y}(t) - 6y(t) + 6u(t) =$

$= -6x_3(t) - 11x_2(t) - 6x_1(t) + 6u(t)$

④ Skriv på önskad matrisform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

8.4b

- SKRIV $\dddot{y} + \ddot{y} + 5\dot{y} + 3y = 4\ddot{u} + \dot{u} + 2u$ PÅ TILLSTÅNDSFORM.
- 3:E ORDNINGENS DIFF. EKV. ⇒ 3 TILLSTÅND $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

- TA FRAM ÖVERFÖRINGSFUNKTIONEN: $G: u \to y$

$$s^3 Y(s) + s^2 Y(s) + 5s Y(s) + 3Y(s) = 4s^2 U(s) + sU(s) + 2U(s)$$

$$Y(s) = \frac{4s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + 5s + 3} U(s)$$

- OBSERVERBAR KANONISK FORM (TILL EXEMPEL)

RESULTATET PÅ SIDA 159 ⇒

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$