TEORI

IMPLEMENTERING

VI HAR HITTILLS TITTAT PÅ TIDSKONTINUERLIGA REGULATORER. TILL EXEMPEL

- PID: $u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt}\right)$
- LEAD/LAG: $U(s) = K\left(\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\right)\left(\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}\right) E(s)$
- TILLSTÅND: $u = -L\hat{x} + l_0 r$

  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$

PROBLEM UPPSTÅR NÄR VI IMPLEMENTERAR DESSA REGULATORER I DATORER EFTERSOM DATORER ARBETAR I DISKRET TID.

VI MÅSTE APPROXIMERA VÅRA KONTINUERLIGA SYSTEM OCH REGULATORER MED DISKRETA.

$$\Longleftrightarrow$$

APPROXIMERA DIFFERENTIALEKVATIONER MED DIFFERENSEKVATIONER.

APPROXIMATIONER

- EULER BAKÅT: $\dot{x}(t) \approx \Delta_e x(t) = \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right)$
- TUSTINS FORMEL: $\dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$

  DÄR $\Delta_t x(t)$ GES AV

  $$\frac{1}{2}\left(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)\right) = \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right)$$

OPERATORFORMALISM

DETTA HANDLAR OM ATT INFÖRA EN "NOTATION" SOM GÖR DET ENKLARE FÖR OSS ATT BESKRIVA KOMPLICERADE SYSTEM.

- DERIVERINGSOPERATOR p,

$\dot{x}(t) = px(t)$,

$\ddot{x}(t) = p \cdot px(t) = p^2 x(t)$.

- FÖRSKJUTNINGSOPERATOR q_T

$x(t+T) = q_T x(t)$,

$x(t-T) = q_T^{-1} x(t)$.

VI KAN NU SKRIVA OM EULER BAKÅT SOM

$\dot{x}(t) = px(t)$,

$\dot{x}(t) \approx \Delta_e x(t) = \frac{1}{T}\Big(x(t) - x(t-T)\Big) = \frac{1}{T}(1-q^{-1})x(t)$,

$\Rightarrow \quad p \approx \frac{1}{T}(1-q^{-1})$,

OCH TUSTINS FORMEL SOM

$$\frac{1}{2}\Big(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)\Big) = \frac{1}{T}\big(x(t) - x(t-T)\big)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(1+q^{-1})\Delta_t x(t) = \frac{1}{T}(1-q^{-1})x(t) \rightarrow \Delta_t x(t) = \frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}x(t)$$

$\dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$

$\Rightarrow \quad p \approx \frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}$

SAMPLING

- T: SAMPLINGSINTERVALL

  (TIDEN MELLAN PUNKTERNA SOM ANVÄNDS)

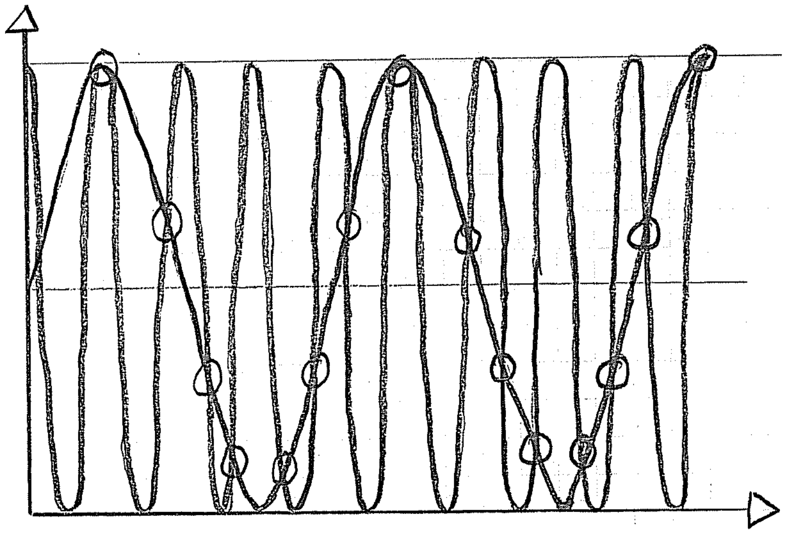
- ω_S: SAMPLINGSFREKVENS

  $$\omega_S = \frac{2\pi}{T}$$

- ω_N: NYQUISTFREKVENS

  $$\omega_N = \frac{\omega_S}{2} = \frac{\pi}{T}$$

OBS! ALLA FREKVENSER SOM ÄR SNABBARE (STÖRRE) ÄN ω_N KAN INTE SKILJAS FRÅN EN LÅNGSAMMARE FREKVENS. DETTA KALLAS <u>ALIASEFFEKTEN.</u>



(SE BOKEN SIDA 218.)

11.2a

- SAMPLINGINTERVALLET ÄR $\mathcal{I} = [kT \le t < (k+1)T]$

- VET ATT: $\circ\ \dot{y}(t) = u(t)$

  $\circ\ u(t) = u_k$ DÅ $t \in \mathcal{I}$

  DETTA GER ATT

  $\dot{y}(t) = u_k$ DÅ $t \in \mathcal{I}$ (1)

- VILL APPROXIMERA $\dot{y}(t)$ M.H.A. y_k OCH y_{k+1}.

  INTEGRERA (1) ÖVER INTERVALLET $\mathcal{I}$.

  $$VL\ i\ (1) \Rightarrow \int_{kT}^{(k+1)T} \dot{y}(t)\,dt = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{dy(t)}{dt}\,dt = \int_{kT}^{(k+1)T} dy(t) \approx$$

  $$y((k+1)T) - y(kT) = \{y_k = y(kT)\} = y_{k+1} - y_k$$

  $$HL\ i\ (1) \Rightarrow \int_{kT}^{(k+1)T} u_k\,dt = u_k T$$

  $$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = T u_k$$

(11.2b)

- INFÖR P-REGLERING: $u_k = -Ky_k$
- FRÅN (a) $y_{k+1} - y_k = Tu_k = \{u_k = -Ky_k\} = -TKy_k$

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k - TKy_k = (1-TK)y_k \quad (1)$$

- FORMEL (1) KOMMER ATT ITERERAS FÖR ALLA TIDSTEG FRÅN $t=1$ TILL $t=M$ FÖR NÅGOT $M \geq 0$. $\Rightarrow$

y_0

$y_1 = (1-TK)y_0$

$y_2 = (1-TK)y_1 = (1-TK)(1-TK)y_0 = (1-TK)^2 y_0$

$y_3 = (1-TK)^3 y_0$

$\vdots$

$y_M = (1-TK)^M y_0$

FÖR ATT SYSTEMET SKA VARA ASYMPTOTISKT STABIL SÅ MÅSTE $|y_M| \to 0$ DÅ $M \to \infty$.

DETTA ÄR UPPFYLLT OM $|1-TK| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1-TK < 1$

$\Leftrightarrow -2 < -TK < 0 \Leftrightarrow 0 < TK < 2 \Leftrightarrow 0 < K < \frac{2}{T}$

11.1

- VI KOMMER ATT ANVÄNDA p, q_T^{-1} OCH TUSTINS FORMEL.

- VET ATT (FRÅN TEORI):
  - $pu(t) = \dot{u}(t) \approx \Delta_t u(t) = \frac{2}{T} \frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} u(t)$

    $\Rightarrow p \approx \frac{2}{T} \frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}$

  - "s" I LAPLACE MOTSVARAR EN TIDSDERIVATA. VI KAN BYTA UT DEN MOT "p".

- $$F(s) = KN\left(\frac{s+b}{s+bN}\right) = \left\{ "s" = "p" \right\} = KN\left(\frac{p+b}{p+bN}\right) = \left\{ p \approx \frac{2}{T} \frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} \right\} =$$

  $$= KN\left(\frac{\frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} + b}{\frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}} + bN}\right) = \left\{\text{FÖRENKLING}\right\} = KN \frac{bT+2+(bT-2)q^{-1}}{NbT+2+(NbT-2)q^{-1}}$$

- $$U(s) = F(s)E(s) \Leftrightarrow u(t) = KN \frac{bT+2+(bT-2)q^{-1}}{NbT+2+(NbT-2)q^{-1}} e(t) \Rightarrow$$

  $$(NbT+2)u(t) + (NbT-2)\underbrace{q^{-1}u(t)}_{u(t-T)} = KN(bT+2)e(t) + KN(bT-2)\underbrace{q^{-1}e(t)}_{e(t-T)}$$

  $$\Rightarrow u(t) = -\left(\frac{NbT-2}{NbT+2}\right)u(t-T) + KN\left(\frac{bT+2}{NbT+2}\right)e(t) + KN\left(\frac{bT-2}{NbT+2}\right)e(t-T)$$

- IDENTIFIERA PARAMETRAR:

  $$\beta_1 = -\left(\frac{NbT-2}{NbT+2}\right), \quad \alpha_1 = KN\left(\frac{bT+2}{NbT+2}\right), \quad \alpha_2 = KN\left(\frac{bT-2}{NbT+2}\right)$$

11.3a

- FILTRET ÄR LTI $\Rightarrow$ VI HAR SINUS IN-SINUS UT EFTER ATT TRANSIENTERNA HAR LAGT SIG.

- $u_1 = \sin w_2 t, \quad \frac{\pi}{T} < w_2 < \frac{2\pi}{T}$

$$G = \{\text{FILTRET}\} = \frac{1}{1+sT_1}$$

$$y_1(t) = \underbrace{|G(iw_2)|}_{A} \sin(w_2 t + \phi), \quad \phi = \arg(G(iw_2))$$

- A:

$$|G(iw_2)| = \left|\frac{1}{1+iw_2T_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(w_2T_1)^2}} = A \qquad \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{1+(w_2T_1)^2}}}$$

- ϕ:

$$\arg(G(iw_2)) = \arg\left(\frac{1}{1+iw_2T_1}\right) = \underbrace{\arg(1)}_{0} - \arg(1+iw_2T_1) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} w_2 > 0 \\ \text{STABILT FILTER} \Rightarrow \\ T_1 > 0 \end{matrix}\right\} = -\arctan\left(\frac{w_2T_1}{1}\right) = -\arctan(w_2T_1) = \phi$$

- TA HÄNSYN TILL SAMPLINGEN:

$$\boxed{w_1 = \frac{2\pi}{T} - w_2}$$

- $\left.\begin{matrix} w_1 < \frac{\pi}{T} \\ \frac{\pi}{T} < w_2 < \frac{2\pi}{T} \end{matrix}\right\} \quad w_1 = \frac{2\pi}{T} - w_2 \iff w_2 = \frac{2\pi}{T} - w_1$

- $y_1(kT) = A\sin(w_2(kT) + \phi) = A\sin\left(\left(\frac{2\pi}{T} - w_1\right)kT + \phi\right) =$

$$= A\sin(2\pi k - kw_1T + \phi) = \{2\pi\text{-PERIODISK}\} =$$

$$= A\sin(-kw_1T + \phi) = \{\text{UDDA FUNKTION}\} = -A\sin(kw_1T - \phi) =$$

$$= \{\text{TRIGONOMETRI}\} = A\sin(kw_1T + \pi - \phi)$$

- IDENTIFIERAR φ. $\boxed{\varphi = \pi + \arctan(w_2T_1)}$

(11.3b)

- VI ÄR ALLTSÅ INTRESSERADE AV: $|G(i\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

- • VET ATT BANDBREDDEN ω_B ÄR DEFINIERAD SOM $|G(i\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

  • GIVET I UPPGIFT ÄR ATT u_0 LIGGER I FREKVENSINTERVALLET $0 \leq \omega \leq \pi/T$.

- $|G(i\omega_B)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega_B T_1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1+(\omega_B T_1)^2 = 2 \Rightarrow \omega_B T_1 = 1 \Rightarrow \omega_B = \dfrac{1}{T_1}$

  MINST AMPLITUD FÅS VID $\omega_B = \frac{1}{T_1}$.

  FREKVENSER ÖVER ω_B DÄMPAS. VI VILL INTE ATT FREKVENSER I u_0 (DEN INTRESSANTA) SKA DÄMPAS.

  $\Rightarrow \omega_{u_0} < \pi/T < \omega_B = \dfrac{1}{T_1} \rightarrow \dfrac{\pi}{T} \leq \dfrac{1}{T_1} \rightarrow$ GRÄNSEN: $\dfrac{\pi}{T} = \dfrac{1}{T_1}$

- INSÄTTNING GER:

  $$|G(i\omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_2 T_1)^2}} = \left\{ T_1 = \frac{T}{\pi} \right\} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_2 T}{\pi}\right)^2}}$$