1 Att integrera med ett inverst trigonometriskt variabelbyte

Med Coulombs lag i elektrostatik uttrycker vi avståndet mellan en källpunkt $\boldsymbol{r}'$ (en parametrisering av punkter där källan finns) och en fältpunkt $\boldsymbol{r}$, där vi söker det fältet med hjälp av vektorn $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \in \mathbb{R}^3$. Vi har Coulombs lag som:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}\mathrm{d}q' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}q'$$

där $\mathrm{d}q'$ är ett infinitessimalt element av laddning (beroende av källpunkten $\boldsymbol{r}'$) och ε_0 är den elektriska konstanten (permittiviteten för tomrum). Det är därför speciellt intressant med integraler av typen $1/|\boldsymbol{R}|^3$. Vi ska i detta dokument titta lite på denna typ av integraler nedan.

1.1 Att integrera en elektriskt viktig funktion

Låt oss börja med en riktigt tjusig metod för att lösa integraler: inverst trigonometriskt variabelbyte. Vi ska tillämpa denna metod på integralen

$$I = \int \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

Variabelbytet[1] $x = x(\beta) = y\tan\beta$ ger många fina egenskaper som hjälper oss att lösa ovanstående integral. Då

$$\frac{d}{d\beta}x(\beta) = y(1 + \tan^2\beta) = \frac{y}{\cos^2\beta} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{y\mathrm{d}\beta}{\cos^2\beta}$$

samt

$$x^2 + y^2 = y^2(1 + \tan^2\beta) = \frac{y^2}{\cos^2\beta}.$$

I båda dessa relationer får vi den önskade formen med hjälp av den trigonometriska ettan: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$. Med hjälp av dessa två identiteter får vi att integralen reduceras till:

$$I = \int (\frac{\cos^3\beta}{y^3})(\frac{y\mathrm{d}\beta}{\cos^2\beta}) = \frac{1}{y^2}\int \cos\beta\mathrm{d}\beta = \frac{1}{y^2}\sin\beta + C$$

där C är en konstant. Vi har nu nästan löst integralen, det vi behöver göra som ytterligare steg är att identifiera $\sin\beta$ i termer av x och y. Vi definierade

[1] Vi ser att det är ett inverst trigonometriskt variabelbyte då $\beta = \tan^{-1}(x/y)$.

$\tan\beta = x/y$, om vi tänker oss x, y som katetrarna i en rätvinklig triangel ser vi att $\sin\beta = x/\sqrt{x^2+y^2}$, och vi har svaret av den sökta integralen:

$$I = \int \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} + C$$

1.2 Validering

Vi kan alltid kolla att integralen är korrekt uträknad genom derivering. Vi har att:

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{y^2(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Vi ser att integralen av höger och vänster sida, blir just den önskade integralen vi som sökte, plus en godtycklig konstant, då derivatan av en konstant försvinner.

1.3 Ett exempel med Coulombs lag

Givet en stav med längd L, med jämt fördelad laddning $\mathrm{d}q' = \frac{Q}{L}\mathrm{d}x'$, som ligger på x-axeln mellan $-L/2$ och $L/2$ vad blir $\boldsymbol{E}$ på y-axeln?

I detta fall är fältpunkten $\boldsymbol{r} = y\hat{\boldsymbol{y}}$ och källpunkter $\boldsymbol{r'} = x'\hat{\boldsymbol{x}}$, vilket ger avståndsvektorn $\boldsymbol{R} = y\hat{\boldsymbol{y}} - x'\hat{\boldsymbol{x}}$ och vektorns längd blir $R = \sqrt{y^2+(x')^2}$. Coulombs lag ger:

$$\boldsymbol{E}(y\hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{y\hat{\boldsymbol{y}} - x'\hat{\boldsymbol{x}}}{((x')^2+y^2)^{3/2}}(\frac{Q}{L})\mathrm{d}x' =$$

$$\boldsymbol{E}(y\hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\Big[\hat{\boldsymbol{y}}y\int_{-L/2}^{L/2}\frac{1}{((x')^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x' - \hat{\boldsymbol{x}}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{x'}{((x')^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x'\Big] \tag{1}$$

Notera att den första av integralerna (i $\hat{\boldsymbol{y}}$-riktningen) är precis den som vi just diskuterat, och där med kan lösa. Den andra av integralerna ska vi studera närmare. Låt $f(x') = x'/((x')^2+y^2)^{3/2}$. Vi kommer ihåg att integralen är arean under kurvan som beskrivs av $f(x')$. Notera att $f(x')$ är en udda funktion, dvs $f(-x') = -f(x')$, dvs arean mellan 0 och $L/2$ är precis lika stor och med motsatt tecken som arean mellan $-L/2$ och 0, dvs hela denna integral blir noll. Vi får därför att

$$\boldsymbol{E}(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}y\hat{\boldsymbol{y}}\Big[\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2)}}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{(L/2)^2+y^2)}}\hat{\boldsymbol{y}}.$$

Vi ser att skalningen är laddning/(längd^2·elektrisk kontant), precis som Coulombs lag ovan, vilket ger att dimensionen är korrekt.