

Valmatematik och demokrati

Sonja Kovalevskydagarna
13 november 2010

Svante Linusson
Professor i Matematik
KTH, Stockholm

<http://www.math.kth.se/~linusson>

Matematik i statsvetenskap

Jag skall här ge två exempel:

1. Hur skall mandat fördelas utifrån röstsiffror? Den metod, **uddatalsmetoden** som används i Sverige förklaras och motiveras.
2. Ett exempel på matematisk sats, den så kallade Arrows diktatorsats, som ställer upp 4 rimliga krav på en demokratisk omröstningsprocedur och säger att inte samtliga kan vara uppfyllda.

Exempel från Baknäs

700 personer har röstat i kommunalvalet på partierna A, B och C. Fullmäktige i Baknäs har totalt 7 platser (mandat) som skall fördelas mellan partierna utifrån röstsiffrorna.

Låt oss se på några möjliga utfall.

		Parti A	Parti B	Parti C	
Fall 1	röster	400	200	100	
	mandat	4	2	1	lätt att vara överens om

Exempel från Baknäs

700 personer har röstat i kommunalvalet på partierna A, B och C. Fullmäktige i Baknäs har totalt 7 platser (mandat) som skall fördelas mellan partierna utifrån röstsiffrorna.

Låt oss se på några möjliga utfall.

		Parti A	Parti B	Parti C	
Fall 1	röster	400	200	100	lätt att vara överens om
	mandat	4	2	1	
Fall 2	röster	300	300	100	också klart
	mandat	3	3	1	

Exempel från Baknäs

700 personer har röstat i kommunalvalet på partierna A, B och C. Fullmäktige i Baknäs har totalt 7 platser (mandat) som skall fördelas mellan partierna utifrån röstsiffrorna.

Låt oss se på några möjliga utfall.

		Parti A	Parti B	Parti C	
Fall 1	röster	400	200	100	lätt att vara överens om
	mandat	4	2	1	
Fall 2	röster	300	300	100	också klart
	mandat	3	3	1	
Fall 3	röster	380	220	100	

Exempel från Baknäs

700 personer har röstat i kommunalvalet på partierna A, B och C. Fullmäktige i Baknäs har totalt 7 platser (mandat) som skall fördelas mellan partierna utifrån röstsiffrorna.

Låt oss se på några möjliga utfall.

		Parti A	Parti B	Parti C	
Fall 1	röster	400	200	100	lätt att vara överens om
	mandat	4	2	1	
Fall 2	röster	300	300	100	också klart
	mandat	3	3	1	
Fall 3	röster	380	220	100	Rimligt, ty närmare Fall 1
	mandat	4	2	1	

Exempel från Baknäs

700 personer har röstat i kommunalvalet på partierna A, B och C. Fullmäktige i Baknäs har totalt 7 platser (mandat) som skall fördelas mellan partierna utifrån röstsiffrorna.

Låt oss se på några möjliga utfall.

		Parti A	Parti B	Parti C	
Fall 1	röster	400	200	100	lätt att vara överens om
	mandat	4	2	1	
Fall 2	röster	300	300	100	också klart
	mandat	3	3	1	
Fall 3	röster	380	220	100	Rimligt, ty närmare Fall 1
	mandat	4	2	1	
Fall 4	röster	333	237	130	

Exempel från Baknäs

700 personer har röstat i kommunalvalet på partierna A, B och C. Fullmäktige i Baknäs har totalt 7 platser (mandat) som skall fördelas mellan partierna utifrån röstsiffrorna.

Låt oss se på några möjliga utfall.

		Parti A	Parti B	Parti C	
Fall 1	röster	400	200	100	lätt att vara överens om
	mandat	4	2	1	
Fall 2	röster	300	300	100	också klart
	mandat	3	3	1	
Fall 3	röster	380	220	100	Rimligt, ty närmare Fall 1
	mandat	4	2	1	
Fall 4	röster	333	237	130	Matematisk metod krävs
	mandat	?	?	?	

Uddatalsmetoden

Den metod som i praktiken används i Sverige kallas **uddatalsmetoden**, med vissa justeringar som vi kommer till senare. Uddatalsmetoden kallas också Websters metod eller Sainte-Laguës metod.

Uddatalsmetoden fördelar mandaten stegvis, ett i taget till det parti som i det steget har störst jämförelsetal. I början är jämförelsetalet samma som röstsiffran. Då partiet fått sitt första mandat divideras röstsiffran med 3. Efter andra mandatet med 5 o.s.v.

Har partiet fått m mandat är jämförelsetalet = röstsiffran / $(2m + 1)$

Exempel: Fall 4 från Baknäs

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	

Exempel: Fall 4 från Baknäs

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	Mandat 1 till A
jmfrietal	111(333/3)	237	130	

Exempel: Fall 4 från Baknäs

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	Mandat 1 till A
jmfrlsetal	111(333/3)	237	130	Mandat 2 till B
jmfrlsetal	111	79(237/3)	130	

Exempel: Fall 4 från Baknäs

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	Mandat 1 till A
jmfrlsetal	111(333/3)	237	130	Mandat 2 till B
jmfrlsetal	111	79(237/3)	130	Mandat 3 till C
jmfrlsetal	111	79	43,33(130/3)	

Exempel: Fall 4 från Baknäs

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	Mandat 1 till A
jmfrlsetal	111(333/3)	237	130	Mandat 2 till B
jmfrlsetal	111	79(237/3)	130	Mandat 3 till C
jmfrlsetal	111	79	43,33(130/3)	Mandat 4 till A
jmfrlsetal	66,6(333/5)	79	43,33	

Exempel: Fall 4 från Baknäs

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	Mandat 1 till A
jmfrlsetal	111(333/3)	237	130	Mandat 2 till B
jmfrlsetal	111	79(237/3)	130	Mandat 3 till C
jmfrlsetal	111	79	43,33(130/3)	Mandat 4 till A
jmfrlsetal	66,6(333/5)	79	43,33	Mandat 5 till B
jmfrlsetal	66,6	47,4(237/5)	43,33	

Exempel: Fall 4 från Baknäs

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	Mandat 1 till A
jmfrlsetal	111(333/3)	237	130	Mandat 2 till B
jmfrlsetal	111	79(237/3)	130	Mandat 3 till C
jmfrlsetal	111	79	43, 33(130/3)	Mandat 4 till A
jmfrlsetal	66, 6(333/5)	79	43, 33	Mandat 5 till B
jmfrlsetal	66, 6	47, 4(237/5)	43, 33	Mandat 6 till A
jmfrlsetal	47, 57(333/7)	47, 4	43, 33	

Exempel: Fall 4 från Baknäs

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	Mandat 1 till A
jmfrlsetal	111(333/3)	237	130	Mandat 2 till B
jmfrlsetal	111	79(237/3)	130	Mandat 3 till C
jmfrlsetal	111	79	43,33(130/3)	Mandat 4 till A
jmfrlsetal	66,6(333/5)	79	43,33	Mandat 5 till B
jmfrlsetal	66,6	47,4(237/5)	43,33	Mandat 6 till A
jmfrlsetal	47,57(333/7)	47,4	43,33	Mandat 7 till A
mandat	4	2	1	Slutlig fördelning

Notera att en röst till på parti B hade räckt för att parti B skulle ha tagit det sjunde mandatet istället för parti A.

Hur kan man motivera uddatalsmetoden?

Låt oss titta lite noggrannare på exemplet ovan där röstsiffrorna var:

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	

Ett sätt att motivera uddatalsmetoden är att visa att den är rättvis om man tar partierna två i taget. Antag att det är givet att parti C skall ha ett mandat.

Hur kan man motivera uddatalsmetoden?

Låt oss titta lite noggrannare på första exemplet ovan där röstsiffrorna var:

	Parti A	Parti B	Parti C
röster	333	237	130

Ett sätt att motivera uddatalsmetoden är att visa att den är rättvis om man tar partierna två i taget. Antag att det är givet att parti C skall ha ett mandat.

Partierna A och B skall då dela på 6 mandat och de har tillsammans 570 röster. Varje mandat motsvarar $\frac{333+237}{6} = 95$ röster.

Mandat:	1	2	3	4	5	6
Röster:	95	190	285	380	475	570

Hur kan man motivera uddatalsmetoden?

Låt oss titta lite noggrannare på första exemplet ovan där röstsiffrorna var:

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	

Ett sätt att motivera uddatalsmetoden är att visa att den är rättvis om man tar partierna två i taget. Antag att det är givet att parti C skall ha ett mandat.

Partierna A och B skall då dela på 6 mandat och de har tillsammans 570 röster. Varje mandat motsvarar $\frac{333+237}{6} = 95$ röster.

Mandat:	1	2	2,5	3	3,5	4	5	6
Röster:	95	190	237,5	285	332,5	380	475	570

Hur kan man motivera uddatalsmetoden?

Låt oss titta lite noggrannare på första exemplet ovan där röstsiffrorna var:

	Parti A	Parti B	Parti C	
röster	333	237	130	

Ett sätt att motivera uddatalsmetoden är att visa att den är rättvis om man tar partierna två i taget. Antag att det är givet att parti C skall ha ett mandat.

Partierna A och B skall då dela på 6 mandat och de har tillsammans 570 röster. Varje mandat motsvarar $\frac{333+237}{6} = 95$ röster.

Mandat:	1	2	2,5	3	3,5	4	5	6
Röster:	95	190	237,5	285	332,5	380	475	570

Parti A är precis över 3,5 mandat och bör således avrundas till 4.

Parti B är precis under 2,5 mandat och bör således avrundas till 2.

Det vi såg på föregående sida var att

$$333 > \frac{333+237}{6} \cdot 3,5 \text{ och att } 237 < \frac{333+237}{6} \cdot 2,5,$$

vilket är samma som

$$\frac{333}{3,5} > \frac{333+237}{6} > \frac{237}{2,5} \text{ eller}$$

$$\frac{333}{7} > \frac{237}{5}, \text{ vilket är precis den jämförelse som uddatalsmetoden gör.}$$

En väldigt bra egenskap hos uddatalsmetoden är att man inte behöver jämföra partierna parvis utan jämförelsetalen gör att vi kan jämföra alla samtidigt och får ändå hyfsat **proportionell** fördelning mellan varje par av partier.

Sammanfattning om Baknäs

700 personer har röstat på fyra olika sätt och 7 mandat skall fördelas.

		Parti A	Parti B	Parti C	
Fall 1	röster	400	200	100	lätt att vara överens om
	mandat	4	2	1	
Fall 2	röster	300	300	100	också klart
	mandat	3	3	1	
Fall 3	röster	380	220	100	Rimligt ty vi är närmare Fall 1
	mandat	4	2	1	
Fall 4	röster	333	237	130	Uddatalsmetoden
	mandat	4	2	1	

Divisorsmetoder

Det finns några andra så kallade divisorsmetoder.

Namn	Divisorer	Formel
Webster (uddatal)	$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{9}{2} \dots$	$m + \frac{1}{2}$
	$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \dots$	$2m + 1$

} samma

Divisorsmetoder

Det finns några andra så kallade divisorsmetoder.

Namn	Divisorer	Formel
Webster (uddatal)	$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{9}{2} \dots$	$m + \frac{1}{2}$
	$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \dots$	$2m + 1$
Jefferson (d'Hondt)	$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \dots$	$m + 1$

} samma

Divisorsmetoder

Det finns några andra så kallade divisorsmetoder.

Namn	Divisorer					Formel
Huntington-Hill	"0"	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20} \dots$	$\sqrt{m(m+1)}$
Webster (uddatal)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2} \dots$	$m + \frac{1}{2}$
	1	3	5	7	9...	$2m + 1$
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	5...	$m + 1$

} samma

Divisorsmetoder

Det finns några andra så kallade divisorsmetoder.

Namn	Divisorer					Formel
Huntington-Hill	"0"	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20} \dots$	$\sqrt{m(m+1)}$
Webster (uddatal)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2} \dots$	$m + \frac{1}{2}$
	1	3	5	7	9...	$2m + 1$
Jämjade uddatal	1,4	3	5	7	9...	
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	5...	$m + 1$

} samma

Ordnade så att Huntington-Hill är bäst för små partier och Jefferson bäst för stora.

Divisorsmetoder

Det finns några andra så kallade divisorsmetoder.

Namn	Divisorer					Formel
Huntington-Hill	"0"	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20} \dots$	$\sqrt{m(m+1)}$
Webster (uddatal)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2} \dots$	$m + \frac{1}{2}$
	1	3	5	7	9...	$2m + 1$
Jämjade uddatal	1,4	3	5	7	9...	
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	5...	$m + 1$

} samma

Ordnade så att Huntington-Hill är bäst för små partier och Jefferson bäst för stora.

Huntington-Hill används i USA för att fördela platser proportionellt i representanthuset mellan delstaterna.

Jefferson-d'Hondts metod används i många Europiska länder.

Jämjade uddatalsmetoden är ett svenskt påhitt.

Småpartispärrar

I Sverige används uddatalsmetoden med några tillägg som gynnar de större partierna.

- **Procentspärr** på 4% i riksdagen och 3% i landstingen.

Småpartispärrar

I Sverige används uddatalsmetoden med några tillägg som gynnar de större partierna.

- **Procentspärr** på 4% i riksdagen och 3% i landstingen.
- **Jämkning**, som innebär att första jämförelsetalet fås genom division med 1,4, vilket gör det första mandatet något svårare att få. Betydelsefullt främst i kommunalval där procentgräns och utjämningsmandat saknas. I valet 2010 spelade det roll också i riksdagsval och landstingsval eftersom utjämningsmandaten inte räckte till. Talet 1,4 saknar matematisk relevans, det är ett politiskt valt tal.

Småpartispärrar

I Sverige används uddatalsmetoden med några tillägg som gynnar de större partierna.

- **Procentspärr** på 4% i riksdagen och 3% i landstingen.
- **Jämkning**, som innebär att första jämförelsetalet fås genom division med 1,4, vilket gör det första mandatet något svårare att få. Betydelsefullt enbart i kommunalval där procentgräns och utjämningsmandat saknas. I valet 2010 spelade det roll också i riksdagsval och vissa landstingsval eftersom utjämningsmandaten inte räckte till. Talet 1,4 saknar matematisk relevans, det är ett politiskt valt tal.
- **Valkretsindelning** av större kommuner. Det innebär att man räknar den jämkade uddatalsmetoden på en mindre del av kommunen i taget, istället för hela kommunen. Detta gynnar de största partierna och gör det till lite av ett lotteri för de mindre partierna hur många mandat de får.

Exempel i Stockholms kommunalval 2010: (C) fick 3,98% och 3 mandat, (KD) fick 3,49% och 1 mandat.

Filosofisk fråga:

Finns det bortkastade röster?

Kan man säga att en röst på ett parti som inte fick något mandat är mer bortkastad än en röst på ett parti som fick mandat? Det är ju sällan det hänger på en enskild röst. Om det inte avgörs av en enda röst, är då alla röster bortkastade?

Är det kanske bara en mänsklig strävan att tillhöra ett vinnande lag som gör att många tycker att en röst på ett parti som inte fick mandat är mer bortkastad? (Jag tycker inga röster är bortkastade.)

2. Hur utformar man ett perfekt röstsystem?

Det finns inget perfekt röstsystem. Man kan bevisa att alla metoder har någon nackdel.

Det är ett eget forskningsområde hur man skapar röstsystem för att uppfylla olika kriterier.

Arrows diktatorsats

Som ett exempel från detta forskningsområde tänkte jag beskriva en omöjlighet. Antag att **varje väljare skall rangordna** ett visst antal (minst 3) kandidater och att man från dessa rangordningar vill ha ett röstsystem som formar en **gemensam rangordning** (där den översta på listan blir vald).

Vi vill att röstsystemet skall uppfylla:

- **Ingen diktator:** Röstsystemet skall inte alltid följa en viss väljares vilja.
- **Universalitet:** Alla möjliga gemensama rangordningar skall vara möjliga och processen deterministisk.
- **Paretoeffektivitet:** Om alla väljare föredrar kandidat A framför kandidat B så måste den gemensamma rangordningen också ha A före B.
- **Oberoende av irrelevanta alternativ:** Om någon kandidat som inte har med toppstriden att göra drar sig ur så skall det inte påverka vem som vinner.

Arrows diktatorsats

Som ett exempel från detta område tänkte jag beskriva en omöjlighet. Antag att **varje väljare skall rangordna** ett visst antal (minst 3) kandidater och att man från dessa rangordningar vill ha ett röstsystem som formar en **gemensam rangordning** (där den översta på listan blir vald).

Vi vill att röstsystemet skall uppfylla:

- **Ingen diktator:** Röstsystemet skall inte alltid följa en viss väljares vilja.
- **Universalitet:** Alla möjliga gemensama rangordningar skall vara möjliga och processen deterministisk.
- **Paretoeffektivitet:** Om alla väljare föredrar kandidat A framför kandidat B så måste den gemensamma rangordningen också ha A före B.
- **Oberoende av irrelevanta alternativ:** Om någon kandidat som inte har med toppstriden att göra drar sig ur så skall det inte påverka vem som vinner.

Arrows diktatorsats: Inget sådant röstsystem finns.

Brukar lite mer publikfriande formuleras som att vill man ha universalitet, paretoeffektivitet och oberoende av irrelevanta alternativ hos ett röstningssystem så är enda alternativet diktatur.

Exempel: Melodifestivalen

7 länder skall rösta mellan fyra melodier a,b,c,d. Den första melodin får 4 poäng av varje land, den andra 3 poäng, den tredje 2 poäng och den sista 1 poäng. (Kallas Bordas röstmetod.) Rösterna blev som följer.

	4 poäng	3 poäng	2 poäng	1 poäng
Land 1 och 2	a	d	c	b
Land 3 och 4	b	a	d	c
Land 5,6 och 7	c	b	a	d

Detta ger melodierna a,b,c,d poängen 20,19,18 resp. 13, så $a > b > c > d$.

Exempel: Melodifestivalen

7 länder skall rösta mellan fyra melodier a,b,c,d. Den första melodin får 4 poäng av varje land, den andra 3 poäng, den tredje 2 poäng och den sista 1 poäng. (Kallas Bordas röstmetod.) Rösterna blev som följer.

	4 poäng	3 poäng	2 poäng	1 poäng
Land 1 och 2	a	(d)	c	b
Land 3 och 4	b	a	(d)	c
Land 5,6 och 7	c	b	a	(d)

Detta ger melodierna a,b,c,d poängen 20,19,18 resp. 13, så $a > b > c > d$. Sedan blir det känt att fusk har förekommit och melodi d diskvalificeras. Sångerskan av melodi c kräver då listigt en omräkning.

Exempel: Melodifestivalen

7 länder skall rösta mellan fyra melodier a,b,c,d. Den första melodin får 4 poäng av varje land, den andra 3 poäng, den tredje 2 poäng och den sista 1 poäng. (Kallas Bordas röstmetod.) Rösterna blev som följer.

	4 poäng	3 poäng	2 poäng	1 poäng
Land 1 och 2	a	(d)	c	b
Land 3 och 4	b	a	(d)	c
Land 5,6 och 7	c	b	a	(d)

Detta ger melodierna a,b,c,d poängen 20,19,18 resp. 13, så $a > b > c > d$. Sedan blir det känt att fusk har förekommit och melodi d diskvalificeras. Sångerskan av melodi c kräver då listigt en omräkning.

	4 poäng	3 poäng	2 poäng	1 poäng
Land 1 och 2	a	c	b	-
Land 3 och 4	b	a	c	-
Land 5,6 och 7	c	b	a	-

Det ger melodierna a,b,c poängen 20,21 resp. 22 poäng. Ordningen mellan a,b,c har kastats om helt! Detta strider mot det fjärde kravet i Arrows sats.

Konståkning

Följande hände vid EM i konståknings för herrar 1997.

Innan sista åkaren A. Vlaschenko åkte så låg V. Zagorodniuk på silverplats och P. Candelero på bronsplats. Men efter att Vlaschenko hade åkt och hamnat på sjätte plats, så hade Candelero blivit uppflyttad till silverplats och Zagorodniuk blivit snopet av med sin silvermedalj.

Skridskosporten försökte ändra sitt poängräkningssystem, men vi som känner till Arrows sats, vet att de aldrig helt kan undvika ett system med problem.

Hemuppgifter

1. Gå in på www.val.se och klicka fram valresultatet i kommunalvalet i din valkrets. Kontrollera att mandatfördelningen har blivit korrekt.
2. Leta upp resultatet i kommunalvalet 2006 i valkrets 4 i Stockholms stad. (KD) fick där inget mandat med sina 2865 röster. Bekräfta att de hade fått ett mandat om de hade fått 2866 röster.
3. Om Baknäs hade använt Huntington-Hills metod med geometriskt medelvärde, vem hade då fått sjunde mandatet i Fall 4?
4. Kan man stryka något lag (annat än Malmö) ur allsvenskan för herrfotboll så att Helsingborg IF vinner istället för Malmö FF?

Referenser

Om Uddatalsmetoden:

<http://www.val.se>

<http://www.math.su.se/~jesper> lite matematik kring uddatalsmetoden

Svante Linusson, "Uddatalsmetoden och valsysteem", kapitel i **Människor och matematik**, NCM (2008).

Om olika valmetoder och deras historia:

Szpiro, Georg, "Numbers Rule"

Om Arrows sats:

Sen, Amartya: *Collective Choice and Social Welfare* (1970)

http://en.wikipedia.org/wiki/Arrow's_impossibility_theorem