Proportionalitet och valmatematik

Svante Linusson

Kungl Tekniska Högskolan

April 14, 2011

Introduction

The basic problem I will discuss for the first half today is the following:

- Given votes for different parties in an election, how should one proportionally determine the number of seats each party should get in the parliament.

Introduction

The basic problem I will discuss for the first half today is the following:

- Given votes for different parties in an election, how should one proportionally determine the number of seats each party should get in the parliament.

A very similar question, well studied in the USA, is:

- Given the size of the population in the various states. How many seats should they each have in the house of representatives?

This later question has become known as the problem of **apportionment**.

Introduction

The basic problem I will discuss for the first half today is the following:

- Given votes for different parties in an election, how should one proportionally determine the number of seats each party should get in the parliament.

A very similar question, well studied in the USA, is:

- Given the size of the population in the various states. How many seats should they each have in the house of representatives?

This later question has become known as the problem of **apportionment**.
The second half I will talk about the situation in Sweden and the biproportional problem, when we want to have proportionality both with respect to parties and regions.

Notation

Fix notation
$M :=$ total number of seats
$P :=$ total size of population
$p_i :=$ population in state i
m_i will be the number of seats given to state i

Hamilton-Hare

A popular and easy to understand method is the so called **Hamilton's** method, a.k.a. Hare's method, method of largest reminder (or valkvotsmetoden in Swedish).

Hamilton-Hare

A popular and easy to understand method is the so called **Hamilton's** method, a.k.a. Hare's method, method of largest reminder (or valkvotsmetoden in Swedish).

- Compute the true proportion of seats that each state should have $\tau_i := \frac{M \cdot p_i}{P}$.

Hamilton-Hare

A popular and easy to understand method is the so called **Hamilton's** method, a.k.a. Hare's method, method of largest reminder (or valkvotsmetoden in Swedish).

- Compute the true proportion of seats that each state should have $\tau_i := \frac{M \cdot p_i}{P}$.
- First each state gets as many seats as the integer part of τ_i.

Hamilton-Hare

A popular and easy to understand method is the so called **Hamilton's** method, a.k.a. Hare's method, method of largest reminder (or valkvotsmetoden in Swedish).

- Compute the true proportion of seats that each state should have $\tau_i := \frac{M \cdot p_i}{P}$.
- First each state gets as many seats as the integer part of τ_i.
- Then the remaining $M - \sum_i \lfloor \tau_i \rfloor$ seats are given to the states with largest decimal part of τ_i.

Example

Example 1

State	A	B	C
$\frac{p_i}{P}$	14%	43%	43%

Example

Example 1

State	A	B	C
$\frac{p_i}{P}$	14%	43%	43%
If $M = 10$			
τ_i	1.4	4.3	4.3

Example

Example 1

State	A	B	C
$\frac{p_i}{P}$	14%	43%	43%
If $M = 10$			
τ_i	1.4	4.3	4.3
m_i	2	4	4

Example

Example 1

State	A	B	C
$\frac{p_i}{P}$	14%	43%	43%
If $M = 10$			
τ_i	1.4	4.3	4.3
m_i	2	4	4
If $M = 11$			
τ_i	1.54	4.73	4.73

Example

Example 1

State	A	B	C
$\frac{p_i}{P}$	14%	43%	43%
If $M = 10$			
τ_i	1.4	4.3	4.3
m_i	2	4	4
If $M = 11$			
τ_i	1.54	4.73	4.73
m_i	1	5	5

Example

Example 1

State	A	B	C
$\frac{p_i}{P}$	14%	43%	43%
If $M = 10$			
τ_i	1.4	4.3	4.3
m_i	2	4	4
If $M = 11$			
τ_i	1.54	4.73	4.73
m_i	1	5	5

This is known as the **Alabama-paradox**, because it threatened Alabama in 1880.

Population paradox

There are more problems with Hamilton's method.

Population paradox

There are more problems with Hamilton's method.

Example 2

	Year 1900			Year 1901		
State	p_i	τ_i	m_i	p_i	τ_i	m_i
Virginia	$1,854,184$	9.599	10			
Maine	$694,4130$	3.595	3			
Total	$74,562,608$		386			

Population paradox

There are more problems with Hamilton's method.

Example 2

	Year 1900			Year 1901		
State	p_i	τ_i	m_i	p_i	τ_i	m_i
Virginia	$1,854,184$	9.599	10	$1,873,951$	9.509	9
Maine	$694,4130$	3.595	3	$699,114$	3.548	4
Total	$74,562,608$		386	$76,069,522$		386

Population paradox

There are more problems with Hamilton's method.

Example 2

	Year 1900			Year 1901		
State	p_i	τ_i	m_i	p_i	τ_i	m_i
Virginia	$1,854,184$	9.599	10	$1,873,951$	9.509	9
Maine	$694,4130$	3.595	3	$699,114$	3.548	4
Total	$74,562,608$		386	$76,069,522$		386

Note that Virgina grew more than Maine both in absolute terms $(19,767$ vs. $4,648)$ and in relative terms $(+1.1\%$ vs. $+0.7\%)$.
Still Virgina lost one seat to Maine!

Population paradox

There are more problems with Hamilton's method.

Example 2

State	Year 1900 p_i	τ_i	m_i	Year 1901 p_i	τ_i	m_i
Virginia	$1,854,184$	9.599	10	$1,873,951$	9.509	9
Maine	$694,4130$	3.595	3	$699,114$	3.548	4
Total	$74,562,608$		386	$76,069,522$		386

Note that Virgina grew more than Maine both in absolute terms $(19,767$ vs. $4,648)$ and in relative terms ($+1.1\%$ vs. $+0.7\%$). Still Virgina lost one seat to Maine!

The total grew with 2%.

New state paradox

A third problem. In 1907 Oklahoma joined the USA. They had roughly $1,000,000$ million inhabitants so should get 5 seats.

New state paradox

A third problem. In 1907 Oklahoma joined the USA. They had roughly $1,000,000$ million inhabitants so should get 5 seats.

Example 3

	Before			After		
State	p_i	τ_i	m_i	p_i	τ_i	m_i
New York	7 264 183	37.606	38			
Maine	694 4130	3.595	3			
Total	74 562 608		386			

New state paradox

A third problem. In 1907 Oklahoma joined the USA. They had roughly $1,000,000$ million inhabitants so should get 5 seats.

Example 3

	Before			After		
State	p_i	τ_i	m_i	p_i	τ_i	m_i
New York	7 264 183	37.606	38	7 264 183	37.589	37
Maine	694 4130	3.595	3	694 4130	3.594	4
Oklahoma				1 000 000	5.175	5
Total	74 562 608		386	75 562 608		391

New state paradox

A third problem. In 1907 Oklahoma joined the USA. They had roughly $1,000,000$ million inhabitants so should get 5 seats.

Example 3

	Before			After		
State	p_i	τ_i	m_i	p_i	τ_i	m_i
New York	7 264 183	37.606	38	7 264 183	37.589	37
Maine	694 4130	3.595	3	694 4130	3.594	4
Oklahoma				1 000 000	5.175	5
Total	74 562 608		386	75 562 608		391

With nothing else changed Oklahoma's entrance caused a seat to go from New York to Maine.

New state paradox

A third problem. In 1907 Oklahoma joined the USA. They had roughly $1,000,000$ million inhabitants so should get 5 seats.

Example 3

	Before			After		
State	p_i	τ_i	m_i	p_i	τ_i	m_i
New York	7 264 183	37.606	38	7 264 183	37.589	37
Maine	694 4130	3.595	3	694 4130	3.594	4
Oklahoma				1 000 000	5.175	5
Total	74 562 608		386	75 562 608		391

With nothing else changed Oklahoma's entrance caused a seat to go from New York to Maine.

Reason: "The $1,000,000$ people are a little more than the 5 seats."

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.
Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.

Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

	State A	State B	State C	
Population	333	237	130	Seat 1 to A

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.

Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

	State A	State B	State C	
Population	333	237	130	Seat 1 to A
Comparison	111 $(\frac{333}{3})$	237	130	Seat 2 to B

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.

Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

	State A	State B	State C	
Population	333	237	130	Seat 1 to A
Comparison	111 $\left(\frac{333}{3}\right)$	237	130	Seat 2 to B
Comparison	111	79$\left(\frac{237}{3}\right)$	130	Seat 3 to C

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.

Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

	State A	State B	State C	
Population	333	237	130	Seat 1 to A
Comparison	111 $(\frac{333}{3})$	237	130	Seat 2 to B
Comparison	111	79$(\frac{237}{3})$	130	Seat 3 to C
Comparison	111	79	43.3$(\frac{130}{3})$	Seat 4 to A

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.

Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

	State A	State B	State C	
Population	333	237	130	Seat 1 to A
Comparison	111 $(\frac{333}{3})$	237	130	Seat 2 to B
Comparison	111	79$(\frac{237}{3})$	130	Seat 3 to C
Comparison	111	79	43.3$(\frac{130}{3})$	Seat 4 to A
Comparison	66.6$(\frac{333}{5})$	79	43.3	Seat 5 to B

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.

Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

	State A	State B	State C	
Population	333	237	130	Seat 1 to A
Comparison	111 $\left(\frac{333}{3}\right)$	237	130	Seat 2 to B
Comparison	111	79$\left(\frac{237}{3}\right)$	130	Seat 3 to C
Comparison	111	79	43.3$\left(\frac{130}{3}\right)$	Seat 4 to A
Comparison	66.6$\left(\frac{333}{5}\right)$	79	43.3	Seat 5 to B
Comparison	66.6	47.4$\left(\frac{237}{5}\right)$	43.3	Seat 6 to A

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.

Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

	State A	State B	State C	
Population	333	237	130	Seat 1 to A
Comparison	111 $(\frac{333}{3})$	237	130	Seat 2 to B
Comparison	111	79$(\frac{237}{3})$	130	Seat 3 to C
Comparison	111	79	43.3$(\frac{130}{3})$	Seat 4 to A
Comparison	66.6$(\frac{333}{5})$	79	43.3	Seat 5 to B
Comparison	66.6	47.4$(\frac{237}{5})$	43.3	Seat 6 to A
Comparison	47.6$(\frac{333}{7})$	47.4	43.3	Seat 7 to A

Webster's method

Let us illustrate how Webster's method (a.k.a. Sainte-Laguë or the odd number method) works.

Example 4: 7 seats shall distributed between three states with total population 700.

	State A	State B	State C	
Population	333	237	130	Seat 1 to A
Comparison	111 $(\frac{333}{3})$	237	130	Seat 2 to B
Comparison	111	79$(\frac{237}{3})$	130	Seat 3 to C
Comparison	111	79	43.3$(\frac{130}{3})$	Seat 4 to A
Comparison	66.6$(\frac{333}{5})$	79	43.3	Seat 5 to B
Comparison	66.6	47.4$(\frac{237}{5})$	43.3	Seat 6 to A
Comparison	47.6$(\frac{333}{7})$	47.4	43.3	Seat 7 to A
Seats	4	2	1	Final apportionment

Motivation for Webster

	State A	State B	State C
Population	333	237	130

Motivation for Webster

	State A	State B	State C
Population	333	237	130

One way to motivate Webster's method is to compare states pairwise. Assume we know state C should have one seat.

Motivation for Webster

	State A	State B	State C
Population	333	237	130

One way to motivate Webster's method is to compare states pairwise. Assume we know state C should have one seat.

States A and B shall then share 6 seats and have together 570 inhabitants. Each seat is thus worth $\frac{333+237}{6} = 95$ people.

Seats:	1	2	3	4	5	6
Pop:	95	190	285	380	475	570

Motivation for Webster

	State A	State B	State C
Population	333	237	130

One way to motivate Webster's method is to compare states pairwise. Assume we know state C should have one seat.

States A and B shall then share 6 seats and have together 570 inhabitants. Each seat is thus worth $\frac{333+237}{6} = 95$ people.

Seats:	1	2	2.5	3	3.5	4	5	6
Pop:	95	190	237.5	285	332.5	380	475	570

Motivation for Webster

	State A	State B	State C
Population	333	237	130

One way to motivate Webster's method is to compare states pairwise. Assume we know state C should have one seat.

States A and B shall then share 6 seats and have together 570 inhabitants. Each seat is thus worth $\frac{333+237}{6} = 95$ people.

Seats:	1	2	2.5	3	3.5	4	5	6
Pop:	95	190	237.5	285	332.5	380	475	570

State A is just above 3.5 seats and "should" be rounded up.
State B is just below 2.5 seats and "should" be rounded down.

What we saw on the previous slide was

$$333 > \frac{333+237}{6} \cdot 3.5 \text{ and } 237 < \frac{333+237}{6} \cdot 2.5.$$

What we saw on the previous slide was

$$333 > \frac{333+237}{6} \cdot 3.5 \text{ and } 237 < \frac{333+237}{6} \cdot 2.5.$$

Or, equivalently $\frac{333}{3.5} > \frac{333+237}{6} > \frac{237}{2.5}$ or $\frac{333}{7} > \frac{237}{5}$,

which is exactly the comparison made by Webster's method.

What we saw on the previous slide was

$$333 > \frac{333+237}{6} \cdot 3.5 \text{ and } 237 < \frac{333+237}{6} \cdot 2.5.$$

Or, equivalently $\frac{333}{3.5} > \frac{333+237}{6} > \frac{237}{2.5}$ or $\frac{333}{7} > \frac{237}{5}$,

which is exactly the comparison made by Webster's method.

A great advantage is of course that all these pairwise comparisons can be made simultaneously.

Divisor methods

Historically there are five divisor methods.

Name	Divisors	Formula
Webster	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{9}{2} \dots$	$m + \frac{1}{2}$

Divisor methods

Historically there are five divisor methods.

Name	Divisors					Formula
Webster	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}\dots$	$m+\frac{1}{2}$
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	$5\dots$	$m+1$

Divisor methods

Historically there are five divisor methods.

Name	Divisors					Formula
Adams	"0"	1	2	3	4 . . .	m
Webster	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}\ldots$	$m+\frac{1}{2}$
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	5 . . .	$m+1$

Divisor methods

Historically there are five divisor methods.

Name	Divisors					Formula
Adams	"0"	1	2	3	4 ...	m
Dean	"0"	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{40}{9}$ ...	$m + \frac{m}{2m+1}$
Webster	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$ ...	$m + \frac{1}{2}$
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	5 ...	$m + 1$

Divisor methods

Historically there are five divisor methods.

Name	Divisors					Formula
Adams	$''0''$	1	2	3	$4\dots$	m
Dean	$''0''$	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{40}{9}\dots$	$m+\frac{m}{2m+1}$
Huntington-Hill	$''0''$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}\dots$	$\sqrt{m(m+1)}$
Webster	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}\dots$	$m+\frac{1}{2}$
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	$5\dots$	$m+1$

Divisor methods

Historically there are five divisor methods.

Name	Divisors					Formula
Adams	"0"	1	2	3	$4\dots$	m
Dean	"0"	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{40}{9}\dots$	$m+\frac{m}{2m+1}$
Huntington-Hill	"0"	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}\dots$	$\sqrt{m(m+1)}$
Webster	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}\dots$	$m+\frac{1}{2}$
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	$5\dots$	$m+1$

They are ordered so Adams is best for small states and Jefferson best for large states.

Motivations

Each of the five methods minimizes a certain pairwise difference.
For instance, Webster minimizes $|\frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j}|$ for every pair i, j.

Motivations

Each of the five methods minimizes a certain pairwise difference. For instance, Webster minimizes $|\frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j}|$ for every pair i, j.

Assume that it does not for some pair i, j. Then

$$\frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} > \frac{m_j + 1}{p_j} - \frac{m_i - 1}{p_i}$$

Motivations

Each of the five methods minimizes a certain pairwise difference. For instance, Webster minimizes $|\frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j}|$ for every pair i, j.

Assume that it does not for some pair i, j. Then

$$
\begin{aligned}
& \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} > \frac{m_j+1}{p_j} - \frac{m_i-1}{p_i} \\
\iff \quad & \frac{2m_i-1}{p_i} > \frac{2m_j+1}{p_j} \\
\iff \quad & \frac{p_i}{2m_i-1} < \frac{p_j}{2m_j+1}
\end{aligned}
$$

Which is exactly the comparison made by Webster.

Quantities minimized by each method.

Method	Divisors	Minimizes
Webster	$m + \frac{1}{2}$	$\left\|\frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j}\right\|$

Quantities minimized by each method.

Method	Divisors	Minimizes
Webster	$m+\frac{1}{2}$	$\lvert\frac{m_i}{p_i}-\frac{m_j}{p_j}\rvert$
Jefferson (d'Hondt)	$m+1$	$\lvert m_i\frac{p_j}{p_i}-m_j\rvert$

Quantities minimized by each method.

Method	Divisors	Minimizes
Adams	m	$\lvert m_i - m_j \frac{p_i}{p_j} \rvert$
Webster	$m + \frac{1}{2}$	$\lvert \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \rvert$
Jefferson (d'Hondt)	$m + 1$	$\lvert m_i \frac{p_j}{p_i} - m_j \rvert$

Quantities minimized by each method.

Method	Divisors	Minimizes
Adams	m	$\lvert m_i - m_j \frac{p_i}{p_j} \rvert$
Dean	$m + \frac{m}{2m+1}$	$\lvert \frac{p_i}{m_i} - \frac{p_j}{m_j} \rvert$
Webster	$m + \frac{1}{2}$	$\lvert \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \rvert$
Jefferson (d'Hondt)	$m + 1$	$\lvert m_i \frac{p_j}{p_i} - m_j \rvert$

Quantities minimized by each method.

Method	Divisors	Minimizes
Adams	m	$\lvert m_i - m_j \frac{p_i}{p_j} \rvert$
Dean	$m + \frac{m}{2m+1}$	$\lvert \frac{p_i}{m_i} - \frac{p_j}{m_j} \rvert$
Huntington-Hill	$\sqrt{m(m+1)}$	$\lvert \frac{p_i}{m_i} - \frac{p_j}{m_j} \rvert / \min\{\frac{p_i}{m_i}, \frac{p_j}{m_j}\}$
Webster	$m + \frac{1}{2}$	$\lvert \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \rvert$
Jefferson (d'Hondt)	$m + 1$	$\lvert m_i \frac{p_j}{p_i} - m_j \rvert$

Quantities minimized by each method.

Method	Divisors	Minimizes
Adams	m	$\lvert m_i - m_j \frac{p_i}{p_j} \rvert$
Dean	$m + \frac{m}{2m+1}$	$\lvert \frac{p_i}{m_i} - \frac{p_j}{m_j} \rvert$
Huntington-Hill	$\sqrt{m(m+1)}$	$\lvert \frac{p_i}{m_i} - \frac{p_j}{m_j} \rvert / \min\{\frac{p_i}{m_i}, \frac{p_j}{m_j}\}$
Webster	$m + \frac{1}{2}$	$\lvert \frac{m_i}{p_i} - \frac{m_j}{p_j} \rvert$
Jefferson (d'Hondt)	$m + 1$	$\lvert m_i \frac{p_j}{p_i} - m_j \rvert$

Huntington-Hill is best for relative measures.

Some US history

1792 – 1830	Jefferson
1840	Webster
1850 – 1870	Hamilton
1880 – 1910	Hamilton and Webster
1930 –	Huntington-Hill

Fierce debate in the 1920's wether to use Webster-Wilcox or Huntington-Hill.

Some US history

1792 – 1830	Jefferson
1840	Webster
1850 – 1870	Hamilton
1880 – 1910	Hamilton and Webster
1930 –	Huntington-Hill

Fierce debate in the 1920's wether to use Webster-Wilcox or Huntington-Hill.
1929 an NAS group of Mathematicians (Bliss, Brown, Eisenhart, Pearl) suggested H-H.

Some US history

1792 – 1830	Jefferson
1840	Webster
1850 – 1870	Hamilton
1880 – 1910	Hamilton and Webster
1930 –	Huntington-Hill

Fierce debate in the 1920's wether to use Webster-Wilcox or Huntington-Hill.
1929 an NAS group of Mathematicians (Bliss, Brown, Eisenhart, Pearl) suggested H-H.
1948 another NAS group (Eisenhart, Morse, von Neumann) also suggested H-H.

Balinski and Young

It is not so difficult to see that all divisor methods avoid the three paradoxes presented. But the following converse is also true.

Balinski and Young

It is not so difficult to see that all divisor methods avoid the three paradoxes presented. But the following converse is also true.

Theorem (Balinski - Young)

A method which avoids the population paradox is equivalent to some divisor method.

Balinski and Young

It is not so difficult to see that all divisor methods avoid the three paradoxes presented. But the following converse is also true.

Theorem (Balinski - Young)

A method which avoids the population paradox is equivalent to some divisor method.

Balinski- Young wrote a large number of papers on this topic and gathered their conclusions in a book 1983.

Balinski and Young

It is not so difficult to see that all divisor methods avoid the three paradoxes presented. But the following converse is also true.

Theorem (Balinski - Young)

A method which avoids the population paradox is equivalent to some divisor method.

Balinski- Young wrote a large number of papers on this topic and gathered their conclusions in a book 1983.

Their conclusion was: Webster is the most fair method!

Quota requirement

A property we would like to have is the **quota requirement** $|\tau_i - m_i| < 1$ for all i.

Hamilton's method clearly satisfy this.

Quota requirement

A property we would like to have is the **quota requirement** $|\tau_i - m_i| < 1$ for all i.

Hamilton's method clearly satisfy this.

Theorem (Balinski - Young)

No divisor method can guarantee the quota requirement.

However, it is in practice violated very rarely by Webster's method.

Probability of Alabama paradox

Theorem (Janson-L.)

Suppose that m states have relative sizes $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_n$, *with* $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, *and assume that* $q_1, \ldots, q_n$ *are linearly independent over* $\mathbb{Q}$. *Then the asymptotic probability that state i suffers from the Alabama paradox when we increase the total number of seats by one equals*

$$\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{i-1}\sum_{k=2}^{n-i}(-1)^{s+k}\binom{s+k-2}{s}e_s(\bar{r}_1^{(i)},\ldots,\bar{r}_{i-1}^{(i)})e_k(\bar{r}_{i+1}^{(i)},\ldots,\bar{r}_n^{(i)}),$$

where $\bar{r}_j^{(i)} := |q_i - q_j|$.

Probability of Alabama paradox

Theorem (Janson-L.)

Suppose that m states have relative sizes $q_1 \le q_2 \le \cdots \le q_n$, with $\sum_{i=1}^n q_i = 1$, and assume that $q_1, \ldots, q_n$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then the asymptotic probability that state i suffers from the Alabama paradox when we increase the total number of seats by one equals

$$\frac{1}{n} \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{k=2}^{n-i} (-1)^{s+k} \binom{s+k-2}{s} e_s(\bar{r}_1^{(i)}, \ldots, \bar{r}_{i-1}^{(i)}) e_k(\bar{r}_{i+1}^{(i)}, \ldots, \bar{r}_n^{(i)}),$$

where $\bar{r}_j^{(i)} := |q_i - q_j|$.

Corollary (Janson-L.)

Assume $p_1, \ldots, p_m$ are uniformly dist., then asymptotically the expected number of states suffering from the paradox is 0.12324.

Det svenska systemet

De 349 platserna i den svenska rikdagen fördelas enligt följande.

1. 310 **fasta mandat** fördelas mellan de 29 valkretsarna med Hamiltons metod baserat på antal röstberättigade före valet.

Det svenska systemet

De 349 platserna i den svenska rikdagen fördelas enligt följande.

1. 310 **fasta mandat** fördelas mellan de 29 valkretsarna med Hamiltons metod baserat på antal röstberättigade före valet.
2. Inom varje valkrets fördelas sedan dessa mandat till partier med den så kallade **jämkade uddatalsmetoden** baserat på antalet röster.

Det svenska systemet

De 349 platserna i den svenska rikdagen fördelas enligt följande.

1. 310 **fasta mandat** fördelas mellan de 29 valkretsarna med Hamiltons metod baserat på antal röstberättigade före valet.
2. Inom varje valkrets fördelas sedan dessa mandat till partier med den så kallade **jämkade uddatalsmetoden** baserat på antalet röster.
3. Man gör sedan en beräkning hur alla 349 mandaten skall fördelas mellan partierna med uddatalsmetoden. De partier som har fått för lite tidigare får dela på de 39 utjämningsmandaten.

Det svenska systemet

De 349 platserna i den svenska rikdagen fördelas enligt följande.

1. 310 **fasta mandat** fördelas mellan de 29 valkretsarna med Hamiltons metod baserat på antal röstberättigade före valet.
2. Inom varje valkrets fördelas sedan dessa mandat till partier med den så kallade **jämkade uddatalsmetoden** baserat på antalet röster.
3. Man gör sedan en beräkning hur alla 349 mandaten skall fördelas mellan partierna med uddatalsmetoden. De partier som har fått för lite tidigare får dela på de 39 utjämningsmandaten.
4. Om något parti i steg (2) fått mer än de borde ha fått enligt steg (3) så tas det partiet och dess mandat bort och beräkningen i (3) görs om på resten av partierna.

Det svenska systemet

De 349 platserna i den svenska rikdagen fördelas enligt följande.

1. 310 **fasta mandat** fördelas mellan de 29 valkretsarna med Hamiltons metod baserat på antal röstberättigade före valet.
2. Inom varje valkrets fördelas sedan dessa mandat till partier med den så kallade **jämkade uddatalsmetoden** baserat på antalet röster.
3. Man gör sedan en beräkning hur alla 349 mandaten skall fördelas mellan partierna med uddatalsmetoden. De partier som har fått för lite tidigare får dela på de 39 utjämningsmandaten.
4. Om något parti i steg (2) fått mer än de borde ha fått enligt steg (3) så tas det partiet och dess mandat bort och beräkningen i (3) görs om på resten av partierna.
5. Ett partis utjämningsmandat fördelas mellan valkretsar med rena uddatalsmetoden.

Jämkade uddatalsmetoden

Name	Divisors					Formula
Adams	"0"	1	2	3	4 ...	m
Dean	"0"	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{24}{7}$	$\frac{40}{9}$ ...	$m + \frac{m}{2m+1}$
Huntington-Hill	"0"	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}$ ...	$\sqrt{m(m+1)}$
Webster (uddatal)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$ ...	$m + \frac{1}{2}$
Wahlund-Erlander (jämkade uddatal)	1.4	3	5	7	9 ...	
Jefferson (d'Hondt)	1	2	3	4	5 ...	$m + 1$

Proportionalitet.

Det är tydligt att avsikten med det svenska systemet är att ge god proportionalitet mellan partierna och hyfsad proportionalitet mellan valkretsarna.
I 2 av de 13 val som systemet använts har det inte blivit proportionellt (Webster) i riksdagsvalet.

Parti	Röster 1988	Antal mandat 1988	Borde fått	Diff
M	983 226	66	66	
C	607 240	42	41	$+1$
FP	655 720	44	44	
MP	296 935	20	20	
S	2 321 826	156	157	-1
VPK	314 031	21	21	

Riksdagsvalet 2010

Parti	Röster 2010	Antal mandat 2010	Borde fått	Diff
M	1 791 766	107	106	$+1$
C	390 804	23	23	
FP	420 524	24	25	-1
KD	333 696	19	20	-1
S	1 827 497	112	109	$+3$
V	334 053	19	20	-1
MP	437 435	25	26	-1
SD	339 610	20	20	

Landstingen

Samma princip gäller i landstingsvalen. Där är 10% av mandaten (avrundat uppåt) utjämningsmandat.
Även där blir det inte alltid som avsett. I årets landstingsval blev det oproportionellt i 9 av de 20 landstingsvalen.

Landsting	Fick för många mandat	Fick för få mandat
Blekinge län	S (+1), SD (+1)	M(-1), V(-1)
Dalarnas län	S (+1)	C(-1)
Jönköpings län	S (+1), M(+1)	V(-1), MP(-1)
Kalmar län	S (+2)	M(-1), KD(-1)
Stockholms län	FP (+1)	S(-1)
Södermanlands län	MP (+1)	S(-1)
Värmlands län	C (+1)	M (-1)
Västernorrlands län	M (+1)	MP(-1)
Örebro län	SD (+1)	S(-1)

Varför ett problem?

Varför kan man inte bara acceptera dessa små fel?

Varför ett problem?

Varför kan man inte bara acceptera dessa små fel?

- Väljarnas preferenser bli inte bra representerade.

Varför ett problem?

Varför kan man inte bara acceptera dessa små fel?

- Väljarnas preferenser bli inte bra representerade.
- Små väljarförskjutningar i en valkrets får orimligt stora konsekvenser (ex. 7 FP-röster till i Värmland).

Varför ett problem?

Varför kan man inte bara acceptera dessa små fel?

- Väljarnas preferenser bli inte bra representerade.
- Små väljarförskjutningar i en valkrets får orimligt stora konsekvenser (ex. 7 FP-röster till i Värmland).
- Röster på ett parti kan göra att ett mandat flyttas från ett annat parti till ett tredje parti.

Varför ett problem?

Varför kan man inte bara acceptera dessa små fel?

- Väljarnas preferenser bli inte bra representerade.
- Små väljarförskjutningar i en valkrets får orimligt stora konsekvenser (ex. 7 FP-röster till i Värmland).
- Röster på ett parti kan göra att ett mandat flyttas från ett annat parti till ett tredje parti.

Exempel: I riksdagsvalet hade det till exempel räckt med ytterligare 95 röster på V i Östergötland för att ett mandat skulle flyttats från S till FP, vilket troligtvis inte hade varit väljarnas avsikt.

Varför ett problem?

Varför kan man inte bara acceptera dessa små fel?

- Väljarnas preferenser bli inte bra representerade.
- Små väljarförskjutningar i en valkrets får orimligt stora konsekvenser (ex. 7 FP-röster till i Värmland).
- Röster på ett parti kan göra att ett mandat flyttas från ett annat parti till ett tredje parti.

Exempel: I riksdagsvalet hade det till exempel räckt med ytterligare 95 röster på V i Östergötland för att ett mandat skulle flyttats från S till FP, vilket troligtvis inte hade varit väljarnas avsikt.

Påminner om populationsparadox.

Vad kan göras?

Jag tycker lagens avsikt om proportoinalitet är tydlig och det behövs en teknisk justering av något slag.

1. Slå ihop valkretsar.
2. Ändra på 1.4.
3. Öka antalet utjämningsmandat.
4. Ha dynamisk bestämning av antalet utjämningsmandat.
5. Införa överhängsmandat.
6. Något annat system?
   Måsättningen bör vara att det skall vara proportionellt mellan partierna med hög säkerhet och ändå god fördelningen mellan valkretsar.

Ändra på jämkningen 1.4

Jan Lanke (prof. em. i Statistik i Lund) har analyserat alla våra riksdagsval med systemet och undersökt olika möjliga jämkningsfaktorer. I årets val fick han följande resultat.

Faktor	Nödvändigt antal utjämningsmandat
1,00	52
1,05	33
1,10	28
1,15	22
1,20	29
1,25	29
1,30	31
1,35	38
1,40	58
1,45	58
1,50	63

Ändra på jämkningen 1.4

Faktor	Värsta året	Nödvändiga utjämningsmandat
1,00	2010	52
1,05	1994	46
1,10	2006	41
1,15	1998	33
1,20	1998	33
1,25	1988	51
1,30	1988	51
1,35	1988	51
1,40	2010	58
1,45	2010	58
1,50	2010	63

Table: Antal utjämningsmandat som hade räckt till vid samtliga 13 riksdagsval med nuvarande system som funktion av första divisorn (Lanke).

Vad man inte kan kräva!

Alla metoderna fördelar mandat (rätt så) proportionellt till partier. Men för **koalitioner** av partier kan det då avvika mer. Det är svårt att kräva proportionalitet mellan koalitioner av partier också.

Vad man inte kan kräva!

Alla metoderna fördelar mandat (rätt så) proportionellt till partier. Men för **koalitioner** av partier kan det då avvika mer. Det är svårt att kräva proportionalitet mellan koalitioner av partier också.

Theorem (Janson(80))

Låt τ_1 och τ_2 vara exakta antalet mandat (dvs icke-avrundat) som block 1 resp. 2 proportionellt skall ha och låt n vara antalet partier. Sannolikheten att block 1 får majoritet i riksdagen är då ungefär

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{12}{n-2}}(r_1 - r_2)\right)$$

Modellen är att skillnaden mellan blocken är fix och rösterna omfördelas slumpvis inom blocket.

Vad man inte kan kräva!

Alla metoderna fördelar mandat (rätt så) proportionellt till partier. Men för **koalitioner** av partier kan det då avvika mer. Det är svårt att kräva proportionalitet mellan koalitioner av partier också.

Theorem (Janson(80))

Låt τ_1 och τ_2 vara exakta antalet mandat (dvs icke-avrundat) som block 1 resp. 2 proportionellt skall ha och låt n vara antalet partier. Sannolikheten att block 1 får majoritet i riksdagen är då ungefär

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{12}{n-2}}(r_1 - r_2)\right)$$

Modellen är att skillnaden mellan blocken är fix och rösterna omfördelas slumpvis inom blocket.

Exempel: Med 8 partier och 10 000 rösters skillnad mellan blocken så är sannolikheten för "fel" riksdagsmajoritet ungefär 20%.

Dynamiskt antal mandat

Jag har fått många olika förslag på helt nya mteoder. Min favorit bland dessa är ett förslag som jag fått från Gustav Ryd: Dynamisk utjämning.

Dynamiskt antal mandat

Jag har fått många olika förslag på helt nya mteoder. Min favorit bland dessa är ett förslag som jag fått från Gustav Ryd: Dynamisk utjämning.

1. Fördela alla 349 mandat på valkretsar med Webster före valet. Mandaten får då en ordning på en lista L.

Dynamiskt antal mandat

Jag har fått många olika förslag på helt nya mteoder. Min favorit bland dessa är ett förslag som jag fått från Gustav Ryd: Dynamisk utjämning.

1. Fördela alla 349 mandat på valkretsar med Webster före valet. Mandaten får då en ordning på en lista L.
2. Röstning sker.

Dynamiskt antal mandat

Jag har fått många olika förslag på helt nya mteoder. Min favorit bland dessa är ett förslag som jag fått från Gustav Ryd: Dynamisk utjämning.

1. Fördela alla 349 mandat på valkretsar med Webster före valet. Mandaten får då en ordning på en lista L.
2. Röstning sker.
3. Mandaten delas nu ut ett i taget i L:s ordning. Ända tills precis innan något parti får för många mandat.

Dynamiskt antal mandat

Jag har fått många olika förslag på helt nya mteoder. Min favorit bland dessa är ett förslag som jag fått från Gustav Ryd: Dynamisk utjämning.

1. Fördela alla 349 mandat på valkretsar med Webster före valet. Mandaten får då en ordning på en lista L.
2. Röstning sker.
3. Mandaten delas nu ut ett i taget i L:s ordning. Ända tills precis innan något parti får för många mandat.
4. Resten delas ut som utjämningsmandat

Dynamiskt antal mandat

Jag har fått många olika förslag på helt nya mteoder. Min favorit bland dessa är ett förslag som jag fått från Gustav Ryd: Dynamisk utjämning.

1. Fördela alla 349 mandat på valkretsar med Webster före valet. Mandaten får då en ordning på en lista L.
2. Röstning sker.
3. Mandaten delas nu ut ett i taget i L:s ordning. Ända tills precis innan något parti får för många mandat.
4. Resten delas ut som utjämningsmandat

På detta sätt får man garanterad proportionalitet för partierna och optimerar för valkretsarna genom få utjämningsmandat.

Schweiz

I Schweiz grundlag står det att parlamentsplatser skall fördelas proportionellt mellan regioner.

Vissa lokala parlament, t.ex. Zürich har antagit ett system designat av Balinski och Demange med implementering utformad av Pukelsheim. Det går i korthet ut på att man sätter upp en matris med röster per parti och kanton. Målet är att skapa en mandatmatris med antalet mandat per parti och kanton. Som randvillkor har man rad och kolonnsummor, dvs proportionalitet för både partier och kantoner.