Övning 6

Linnea Persson - laperss@kth.se

Förtydligande av uppgifter som jag ej hann gå igenom fullständigt:

4.27 c)

$x \in [-3, 3]$
Observera att uträkningen gäller då $a > 0$ enligt uppgiftsbeskrivningen. På grund av symmetri kommer dock samma resultat gälla på andra sidan.

Från ellipsens ekvation bryter vi ut y^2 som en funktion av x:

$$y^2 = 4 - \frac{4}{9}x^2$$

Aståndet mellan punkten $(a, 0)$ och en punkt på ellipsen (x, y) ges av

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

Men att minimera detta är samma som att minimera kvadraten av d:

$$d^2 = (x-a)^2 + y^2 = (x-a)^2 - 4 - \frac{4}{9}x^2 = \frac{5}{9}x^2 - 2ax + a^2 + 4$$

För att hitta minimum deriverar vi $f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 2ax + a^2 + 4$

$$f'(x) = \frac{10}{9}x^2 - 2a$$

En stationär punkt fås således där $x = \frac{9}{5}a$. Observera att detta på grund av vårat begränsade intervall gör att a inte får vara större än $\frac{5}{3}$. Om detta *ej* är fallet blir teckentabellen: Och vi ser att vi har en minimumpunkt i $x = \frac{9}{5}a$

x	0		$\frac{9}{5}a$		3
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
d	$\sqrt{a^2+4}$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{20-4a^2}{5}}$	$\nearrow$	$\lvert 3-a \rvert$

I fallet då $a > \frac{5}{3}$ gäller ej ovanstående teckentabell, eftersom att det minimum vi fått fram då kommer att ligga bortom vårt definerade område! När vårt a har passerat denna punkt på x-axeln så kommer detta innebära att det inte längre är någon ”tävlan” mellan punkterna på ellipsen om vilket tal som hamnar närmast - det måste nu vara det x-värde som ligger längst bort! Ett sätt att se detta på är att återigen rita upp en teckentabell:

x	0	$-$	3
f'	$-$	0	$+$
d	$\sqrt{a^2+4}$	$\searrow$	$\lvert 3-a\rvert$

Det vill säga, avståndet mellan a och ellipsens utbuktning vid puntken $x = 3$ kommer att vara närmast, eftersom att derivatan ständigt minskar!
SVAR:
$d = |3 - a|$ om $a > \frac{3}{5}$
$d = \sqrt{\frac{20-4a^2}{5}}$ om $a \leq \frac{3}{5}$

4.15 c)

Skriv om olikheten som

$$f(x) = \ln(1 + 4x) - \arctan(3x) > 0$$

Notera att de i problemet säger att vi ska betrakta $x > 0$ Derivera för att hitta eventuella stationära punkter:

$$f'(x) = \frac{4}{1+4x} - 31 + 9x^2 = \frac{36x^2 - 12x + 1}{(1+4x)(1+9x^2)} = \frac{(6x-1)^2}{(1+4x)(1+9x^2)}$$

Stationär punkt: $x = 1/6$
Inga odefinerade derivator i vårt intervall!

x	0		1	
f'		$+$	0	
f	0	$\nearrow$	$\ln(5/3) - \arctan(2)$	$\nearrow$

Vår stationära punkt är således varken ett maximum eller minimum! Funktionen är växande från f(0)=0, och därmed gäller olikheten.