SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e
Linnea Persson - laperss@kth.se

2.1.

a)

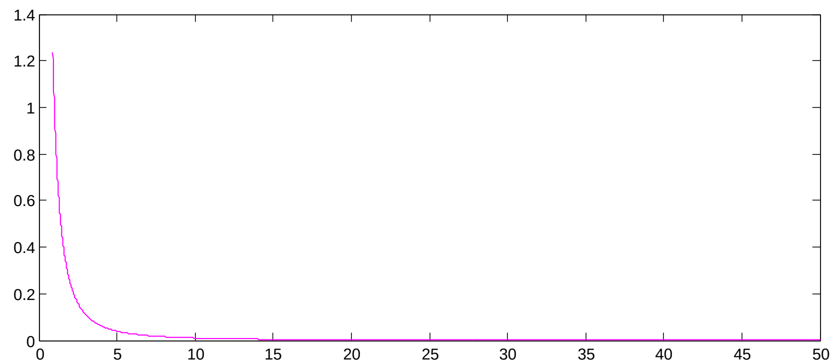

Figure 1: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Då nämnaren går mot ∞ och täljaren är konstant går funktionen mot 0.

b)

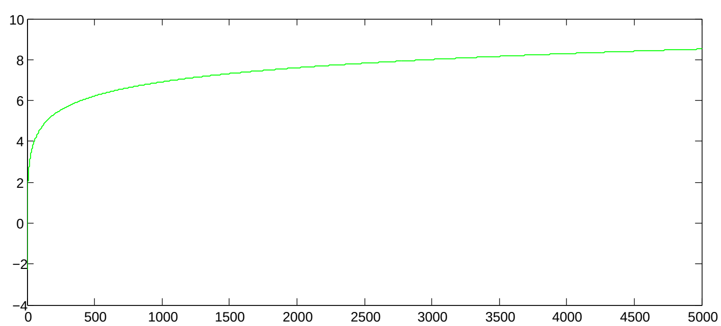

Figure 2: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Funktionen är inte begränsad.

c)

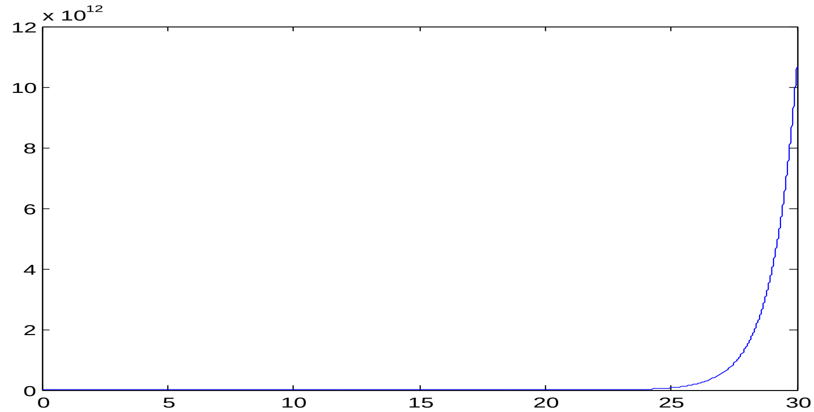

Figure 3: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Funktionen är inte begränsad.

d)

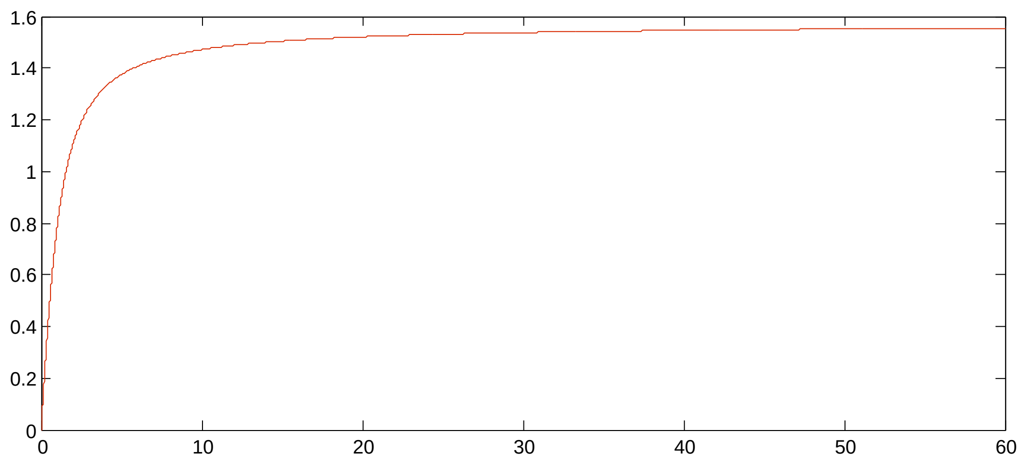

Figure 4: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pi/2$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e
Linnea Persson - laperss@kth.se

e)

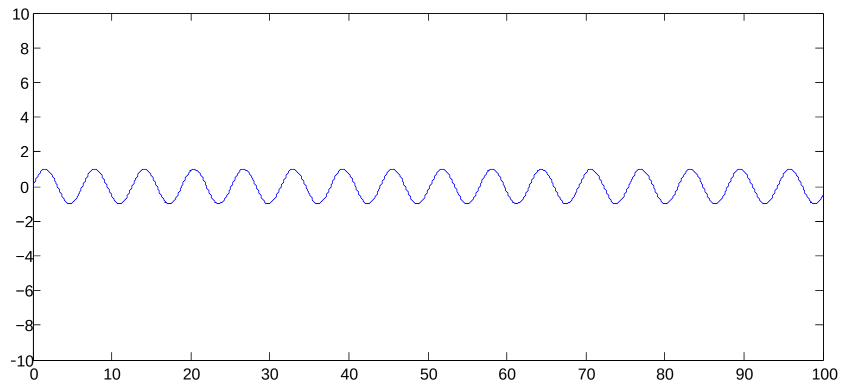

Figure 5: Inget gränsvärde finns

Funktionen upprepas periodiskt i oändligheten.

f)

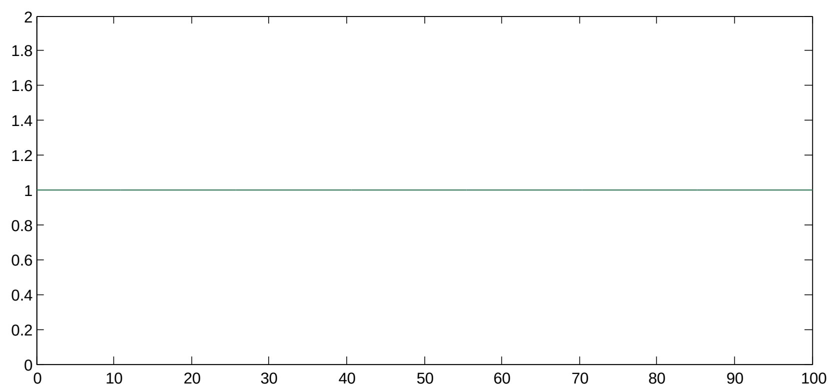

Figure 6: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

Obbservera att funktionen <u>ej</u> är definerad i x=0.

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e
Linnea Persson - laperss@kth.se

2.2.b)

$$\frac{x+1}{x+2} < f(x) < \frac{x+2}{x+1}$$

För att hitta $\lim_{x\to\infty}$ tittar vi på de två gräsvärderna för uttrycken mellan vilka f(x) är instängd.

I båda fallen så kommer uttrycken i oändligheten att gå mot 1. Detta kan inses om man tänker på förhållandet mellan täljare och nämnare. Då x är stort kommer täljare och nämnade vara 'ungefär lika', och kvoten är 'ungefär ett' (lite mindre för den tidigare och lite större för den senare).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

T 2.3.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$$

Nämnaren går uppenbarligen mot ∞, medans täljaren varierar mellan -1 och 1. Då x är stort spelar detta ingen roll, funktionen kommer att gå mot 0.

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\ln x}$$

P.S.S. som ovan: $\ln x$ går mot ∞, $\cos x$ varierar $\Rightarrow f(x) \to 0$

c)

$$\lim_{x\to\infty} x\sin x$$

x går mot ∞, $\sin x$ varierar. Denna funktion kommer inte ha något gränsvärde utan kommer i x att variera mellan $\pm x$, d.v.s. mellan ∞ och $-\infty$.

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\arctan x}$$

$\ln x$ går mot ∞, och $\arctan x$ går mot $\pi/2$. Därför kommer $f(x) \to \infty$.

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e
Linnea Persson - laperss@kth.se

TL 2.11.

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} e^{2n\ln(1+\frac{1}{n})} = \left\{t = \frac{1}{n}\right\} = \lim_{t\to 0} e^{2\frac{\ln(1+t)}{t}}$$

Där vi använt att $a^b = e^{b\ln a}$, samt gjort en substitution.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Detta gränsvärde kommer man enklast fram till med hjälp av l'Hospital (kommer antagligen senare i kursen men är enkelt, och är värt att lära sig redan nu!). Anledningen är att ln(1 + t) och t är "lika mycket 0" i nollan (OBS! Detta resonemang är inte jättematematiskt :-P)

Alltså blir det sökta gränsvärdet:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^{2\cdot 1} = \underline{\underline{e^2}}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{2n})} = \left\{t = \frac{1}{2n}\right\} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{2t}}$$

Detta gränsvärde liknar det i förra uppgiften.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = e^{2\cdot 1} = \underline{\underline{\sqrt{e}}}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})} = \left\{t = \frac{1}{n}\right\} = \lim_{t\to 0} e^{t\ln(1+t)} =$$

$$= e^0 = \underline{\underline{1}}$$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e
Linnea Persson - laperss@kth.se

---

d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{2n})} = \left\{t=\frac{1}{2n}\right\} = \lim_{t\to 0} e^{2t\ln(1+t)} =$$
$$= e^0 = \underline{\underline{1}}$$

e)

Uttrycket är identiskt med d)?

f)

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{n}\ln n} = e^{2\cdot 0} = 1$$

g)

Uttrycket är samma som f).

h)

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(2+\frac{1}{n})} = \left\{t=\frac{1}{n}\right\} = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(2+t)}{t}} = "e^{\infty}" = \infty$$

T 2.16.c)

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})$$

Uttrycket ser ut som $(\infty-\infty)$ - detta är ej definerat. Skriv om uttrycket med hjälp av komplexkonjugat!

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})\frac{(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-x^2-1}{(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})} = \{t=-x\} = \lim_{t\to\infty}\frac{-1-3t}{(\sqrt{t^2-3t}+\sqrt{t^2+1})} =$$

{När t är mycket stort är alla konstanter samt alla 'icke-kvadrerade' delar i uttrycket mycket små i jämförelse, så små att vi ser dem som 0.}

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{(\sqrt{t^2}+\sqrt{t^2})} = \lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{2t} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e

Linnea Persson - laperss@kth.se

T 2.29)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x+1}-p(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-p(x)x-p(x))}{x+1}\right)$$

Hur ska vi få detta att bli 0? Då måste beloppet på nämnaren vara större än den på täljaren. Vi vill ha bort de delar som innehåller x^3, x^2. Sätt $p(x)=x^2+g(x)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3-xg(x)-x^2-g(x))}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-xg(x)-x^2-g(x))}{x+1}\right)$$

För att få bort kvadrattermen; sätt $g(x)=-x+C$ där C är en konstant.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x(-x+C)-x^2-(-x+C)}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-Cx+x+C}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-C)+C}{x+1}$$

Utför polynodivision:

$$\begin{array}{l}\big(\quad \big(1+-1C\big)x \qquad\qquad +C\big):\big(x+1\big)=\big(1+-1C\big)+\dfrac{\big(1+-1C\big)}{x+1}\\ \underline{-\big(1+-1C\big)x-\big(1+-1C\big)}\\ \qquad\qquad\qquad \big(1+-1C\big)\end{array}$$

D.v.s. $\frac{x-Cx+C}{x+1}=(1-C)+\frac{1-C}{x+1}$. C måste alltså vara ett för att den konstanta termen ska försvinna. Då blir gränsfärdet noll. Det sökta polynomet är alltså:

$$p(x)=x^2-x+1$$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e
Linnea Persson - laperss@kth.se

2.36.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Vi vet att båda går mot oändligheten, men eftersom att $\frac{\infty}{\infty}$ ej är definerat måste vi tänka vidare på detta...Vilken av dessa funktioner är störst i oändligheten?

Hur ser funktionerna ut om vi låter båda gå mellan 0 och ∞?

	$\sqrt{x}$	$\ln x$
$f(0)$	0	-∞
$f'(x)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	1/x

ln x börjar alltså under $\sqrt{x}$, och för $x > 4$ växer $\sqrt{x}$ snabbare än ln x. Eftersom att $\sqrt{4} > ln(4)$ så måste $\sqrt{x} > lnx$ åtminstone för alla $x > 4$. Nämnaren växer således snabbare än täljaren och uttrycket blir noll i oändligheten
Ett snabbare sätt att komma fram till detta är att använda l'Hospital.

<u>ALLMÄNT: l'Hospitals regel</u>
Om vi söker ett gränsvärde för ett uttryck som är skrivet som en kvot

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

där de enskilda grässvärderna för f(x) och g(x) är samma:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

och lika med något av $\pm$inf eller 0, så används något som kallas l'Hospitals regel.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Om f'(x) och g'(x) existerar.

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e
Linnea Persson - laperss@kth.se

---

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Använd l'Hospital!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/2x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = \underline{\underline{0}}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\ln x}}{x^{\ln 2}}$$

Eftersom att $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ så är nämnare och täljare identiska. Svaret är därmed $\underline{\underline{1}}$.

e)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 2^x + x + 1}{x^2 3^x + \sqrt{2x}}$$

Termerna med roten ur/utan upphöjning samt konstanten är mycket mindre än de andra termerna för stora x - ignoreras.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 2^x}{x^2 3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x 2^x}{3^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x x = \underline{\underline{0}}$$

f)

$$\lim_{x\to\infty} \ln 2^x - \ln 3^x = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2^x}{3^x}\right) = \text{"}ln(0)\text{"} = \underline{\underline{-\infty}}$$

g)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 2^x}{\ln 3^x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Använd l'hospital!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1/2^x)\ln(2)2^x}{(1/3^x)\ln(3)3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 2}{\ln 3} = \underline{\underline{\frac{\ln 2}{\ln 3}}}$$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e
Linnea Persson - laperss@kth.se

---

h)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 3x}{\ln 2x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Använd l'hospital!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/3x \cdot 3}{1/2x \cdot 2} = \frac{x}{x} = \underline{\underline{1}}$$

i)

$$\lim_{x\to\infty} \ln 2x - \ln x = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \underline{\underline{\ln 2}}$$

j)

$$\lim_{x\to\infty} \ln(2+x) - \ln x = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2+x}{x}\right) = \ln(1) = \underline{\underline{0}}$$

k)

$$\lim_{x\to\infty} \ln x^2 - \ln x = \lim_{x\to\infty} \ln x = \underline{\underline{\infty}}$$

l)

$$\lim_{x\to\infty} x(x - \sqrt{x^2-1}) = \text{"}\infty - \infty\text{"} \leftarrow odefinerat!$$

Multiplicera med konjugat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{x^2 + x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

Då x är stort är $\sqrt{x^2-1} \approx x \Rightarrow$ gränsvärdet är $\underline{\underline{1/2}}$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 3 - Gränsvärden vid oändligheten och talet e

Linnea Persson - laperss@kth.se

1.38)

$$\lim_{n\to\infty} p_n = n2r\sin(\pi/n) = \lim_{t\to 0} 2r\frac{\sin(\pi t)}{t} = \{l'Hospital\} = \frac{2r\pi\cos(\pi t)}{1}$$
$$= \underline{\underline{2\pi r}}$$

1.39.

$$\ln(1+x) \le f(x) \le \ln(1+2x)$$

a)

Både $\ln(1+x)$ och $\ln(1+2x)$ går mot ∞ i oändligheten.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

b)

$\ln(1+x)$går mot 0 då $x \to 0^+$
$\ln(1+2x)$går mot 0 då $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

c)

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)/x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+2x)/x = \lim_{x\to 0^+} \frac{2/(1+2x)}{1} = 2$$
$$\underline{\underline{1 \le \lim_{x\to 0} f(x)/x \le 2}}$$