SF1625 Envariabelanalys
Övning 1 - Funktioner och Binominalsatsen
Linnea Persson - laperss@kth.se

1.10.e)

Vi vill att $|2x-1|$ ska vara povitivt överallt. Då x=$-\frac{1}{2}$ är funktionen 0, därför är den negativ före och positiv efter. Lägger vi till ett minustecken framför absoluttecknet på den negativa sidan så löser vi bort absoluttecknet (på positiva sidan är den ju redan positiv!)

$$|2x+1| = 1 \begin{cases} -2x-1=1 & -\infty < x < -\frac{1}{2} \\ 2x+1=1 & -\frac{1}{2} < x < \infty \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = -1, x_2 = 0}}$

1.11a)

$$|x-2| = x \Rightarrow \begin{cases} -(x-2) = x & \text{då } -\infty < x < 2 \\ x-2 = x & \text{då } 2 < x < \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x = -2 & \text{då } -\infty < x < 2 \\ x-x = 2 & \text{då } 2 < x < \infty \end{cases}$$

Detta har lösningen x=1 för första ekvationen, men ingen lösning för den andra!

SVAR: $\underline{\underline{x = 1}}$

b)

$$|x-1| = |x+3|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(x-1) = -(x+3) & \text{då } -\infty < x < -3 \\ -(x-1) = (x+3) & \text{då } -3 < x < 1 \\ x-1 = x+3 & \text{då } 1 < x < \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+x = -4 & \text{då } -\infty < x < 2 \\ -2x = 2 & \text{då } 2 < x < \infty \\ x-x = 4 & \text{då } 1 < x < \infty \end{cases}$$

Denna ekvation har alltså enbart en lösning i : $\underline{\underline{x = -1}}$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 1 - Funktioner och Binominalsatsen
Linnea Persson - laperss@kth.se

1.31.d)

$$x^2 - 3x + 2$$

Titta på talet - faktoriseringen måste vara på formen $(x-a)(x-b)$ där a och b är konstanter.

$(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+a\cdot b \Rightarrow$ Detta kan bara ske med en etta och en tvåa!

Alternativt - Hitta nollställen.

SVAR: (x-1)(x-2)

T 1.34)

$$p(x) = x^3 - 2x - 4$$

Gissa rot! Ser att 0, 1 ej är rötter, men 2 är det $\rightarrow$ $(x-2)$ är en del av faktoriseringen! (Alternativt, använd SATS 4 [Persson Böijers s.54] och få fram rötter att testa). Använd nu polynomdivision:

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(\;\; x^3 & & -\,2x & -\,4\big) & : \big(x-2\big) = x^2+2x+2 \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2} & & & & \\
 & \;2x^2 & -\,2x & & \\
 & \underline{-\,2x^2} & \underline{+\,4x} & & \\
 & & 2x & -\,4 & \\
 & & \underline{-\,2x} & \underline{+\,4} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-2)(x^2+2x+2)$$

Men den andra delen har inga rötter och kan ej faktoriseras mer!

SVAR: $p(x) = (x-2)(x^2+2x+2)$

1.36.

a)

$$\sum_{k=0}^{10} 3\cdot 2^k = 3\cdot \sum_{k=0}^{10} 2^k = 3(1+2+4+...+512+1024) = 3(2^{10}-1+2^{10})$$
$$= 3\cdot(2^{11}-1) = 6141$$

Linnea Persson - laperss@kth.se

b)

Det går att lägga till $3 \cdot 2^{k=0}$ i summan, om samma värde dras bort utanför!

$$\sum_{k=1}^{10} 3 \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{10} 3 \cdot 2^k - 3 \cdot 2^0 = 3(2^{11} - 1) - 3 = 3(2^{11} - 2) = 6138$$

c)

$$\sum_{k=3}^{10} 3 \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{10} 3 \cdot 2^k - 3 \sum_{k=0}^{2} 3 \cdot 2^k = 3(2^{11} - 1) - 3(2^3 - 1) = 3(2^{11} - 2^3) = 6120$$

d)

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} 3 \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 2^k - \sum_{k=0}^{m-1} 3 \cdot 2^k &= 3 \cdot ((2 \cdot 2^n - 1) - (2 \cdot 2^{m-1} - 1)) \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^{m-1}) = 3 \cdot (2^{n+1} - 2^m)\end{aligned}$$

1.37.b)

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n}$$

Detta ser nästan ut som en geometrisk summa! Förhållandet mellan två intilliggande termer är $e^{-1} \Rightarrow e^{-n} = e^{-1}e^{-n+1} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-k} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{e^1} + ... + \frac{1}{e^{n-1}}\right) = \frac{1}{e}S_n, \text{ där } S_n = \left(1 + ... + \frac{1}{e^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow S_n \cdot \frac{1}{e} = \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n}\right) \Rightarrow \frac{1}{e}S_n - S_n = \frac{1}{e^n} - 1 \Rightarrow S_n = \frac{e^{-n} - 1}{e^{-1} - 1}$$

Men i det här fallet var vi ju intresserade av $\frac{1}{e}S_n$!

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{e}S_n = \underline{\underline{\frac{e^{-n} - 1}{1 - e}}}$$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 1 - Funktioner och Binominalsatsen
Linnea Persson - laperss@kth.se

1.40)

$h = 1$ m	Starthöjden
$E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$	Kinetisk energi
E_{pot}=mgh	Potentiell energi
$E_{kin_1} + E_{pot_1} = E_{kin_2} + E_{pot_2}$	(Anta att systemet är konservativt)

När bollen når marken är potentiella energin 0 $\Rightarrow v_{mark,1} = \sqrt{2gh}$

Den nya energin som följer med upp är 9/10 av den som kom ned.Den n:te gången som bollen slår i marken är hastigheten alltså : $v_{mark_n} = (\frac{9}{10})^n\sqrt{2gh}$. Sträckan den färdas mellan studs n oc n+1 är $2h_n = v^2_{mark_n}/g = (\frac{9}{10})^{2n}\frac{2gh_1}{g} = (\frac{9}{10})^{2n} \cdot 2h_1 = 2(\frac{9}{10})^{2n} = 2 \cdot 0.9^{2n}$

Den totala sträckan är summan av sträckorna från studs 1 börjar till studs 9 slutar plus startsträckan 1 m.

$$2\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{9}{10}\right)^{2k} + 1 = 1 + 2(0.9^2 + 0.9^4 + ... + 0.9^{18}) + \underline{\underline{\approx 8.24 \text{ m}}}$$

1.46)

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{15} = \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot ... \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)$$

Den konstanta termen måste vara uppbyggd av 15 producter mellan antingen x^2 eller $1/x^3$.

$$\begin{cases} n + m = 15 \\ x^{2n} \cdot x^{-3m} = konstant \Rightarrow n = \frac{3}{2}m \end{cases} \Rightarrow n + \frac{3}{2}n = 15 \Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ m = 9 \end{cases}$$

Alla kombinationer som ger 6 x^2 och 9 x^{-3} kommer alltså att ge ett konstant bidrag 1 till ekvationen. Hur många sådana bidrag kommmer det att finnas = hur många sätt kan man välja ut 6 x^2 bland totalt 15?

$$\binom{15}{6} = \frac{15!}{6! \cdot 9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \underline{\underline{5005}}$$

SF1625 Envariabelanalys
Övning 1 - Funktioner och Binominalsatsen
Linnea Persson - laperss@kth.se

1.54.

b)

$$\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{a \cdot a^{1/2}}{a^{2/3}} = \frac{a^{3/2}}{a^{2/3}} = \underline{\underline{a^{5/6}}}$$

e)

$$\frac{\sqrt[4]{x^2\sqrt{y^5}}}{\sqrt{xy}} = \frac{x^{1/2}(y^{5/2})^{1/4}}{x^{1/2}y^{1/2}} = \frac{y^{5/8}}{y^{1/2}} = \underline{\underline{y^{1/8}}}$$

1.72.a)

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 6 \Leftrightarrow \ln(x(x-1)) = \ln 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Endast x=3 ger en reell lösning

SVAR: $\underline{\underline{x = 3}}$