Lead-Lag-regulering (Kapitel 5.4)

Vi tittar i denna övning på hur vi kan ta hjälp av Bodediagram när vi designar vår regulator. Vi har lärt oss att Bodediagramet beskriver bland annat följande egenskaper

- Snabbhet (via bandbredd, skärfrekvens)
- Översläng (via resonanstoppen eller fasmarginalen)
- Statiska förstärkningen

En återkoppling kan påverka systemet. Vi såg i förra övningen att en proportionell regulator flyttade på beloppkurvan och att vi kunde använda detta för att få önskade egenskaper hos systemet.

Idén med lead-lag är att använda återkoppling för att *forma* hur bodediagrammet ser ut. Vi kommer att använda oss av två huvudkomponenter:

- **Lead-länk**. Vi använder oss av en fasavancerande (lead) länk för att uppnå önskad skärfrekvens ω_c och samtidigt öka fasmarginalen:

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}$$

- **Lag-länk**. Vi använder oss av en fasretarderande (lag) länk för att påverka det stationära reglerfelet:

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

Genom att kombinera dessa två komponenter (i vissa fall kan vi behöva mer än en av varje!) kan vi forma vårt Bodediagram för att uppnå de specifikationer vi har på vårt system.

Känslighet (Kapitel 6)

Ett systems påverkan av störningar kallar vi dess känslighet. Hur väl ett system kan undertrycka störningar begränsas av flera faktorer:

- Insignalen är begränsad i verkliga system
- Avvägning mot robusthet (nästa övning)
- Bodes integral (s. 123)

Vi måste ta hänsyn till hur störningar påverkar det slutna systemet när vi designar vår regulator. Känslighetsfunktionen ges av:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)}$$

Övningsuppgifter (5.20, 6.3, 6.1)

5.20a) Beräkna överföringsfunktionen

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

5.20b) F(s) = 1

Med $F(s) = 1$ fås det öppna systemet $G(s)F(s) = G(s)$. Från bilden fås att:

$$\omega_c = 1 \text{ rad/s}$$
$$\phi_m = 50°$$

Systemet är stabilt eftersom vi har en positiv fasmarginal.

5.20c) F(s) = K

Ett dubbelt så snabbt system fås om vi dubblerar bandbredden, som ungefär är lika med skärfrekvensen. Vi har alltså önskad skärfrekvens $\omega_{c,d} = 2$. Med $K = 1$ är $|G(2i)| = 0.3$

En proportionell regulator påverkar enbart beloppkurvan.

$$|KG(2i)| = 1 \implies 0.3K = 1 \implies K = \frac{10}{3}$$

5.20d) Vad förlorar vi på att öka snabbheten?

När vi ökade snabbheten så minskade fasmarginalen till ungefär 5°. Vi kommer alltså få en mycket högre översläng.

5.20e) F(s) = $\mathbf{F}_{lead}$(s)

Vi vill ha

- Dubbelt så snabbt system $\implies \omega_{c,d} = 2$ rad/s
- Samma överläng som för $K = 1 \implies \phi_{m,d} = 50°$

Önskad fashöjning vid $\omega_{c,d}$: $50° - 45° = 45°$. Från tabell på sida 106 fås då att $\beta = 0.18$. Enligt ekvation på sida 107 fås sedan:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 1.18$$

Det sista vi behöver göra är att hitta värdet för K.

$$\begin{aligned}
|F_{lead}(i\omega_{c,d})G(i\omega_{c,d})| &= K\left|\frac{\tau_D i\omega_{c,d}+1}{\beta\tau_D i\omega_{c,d}+1}G(i\omega_{c,d})\right| \\
&= K\frac{\sqrt{(1.18\omega_{c,d})^2+1}}{\sqrt{(0.18\cdot 1.18\omega_{c,d})^2+1}}\cdot 0.3 \\
&\approx K\frac{\sqrt{2.36^2+1}}{\sqrt{0.425^2+1}}\cdot 0.3 \approx 0.7 \\
\implies K = 1.4
\end{aligned}$$

Sammanfattningsvis har vi alltså en regulator

$$F_{lead}(s) = 1.4\frac{1.18s+1}{0.21s+1}$$

5.20f) Beräkna stationära felet för ett stegsvar

Från bilden fås att $|G(0)| = 3.5$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}(1-G_c(s))R(s)s = \lim_{s\to 0}(1-G_c(s)) \\
\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{1}{1+1.4G(0)} \approx 0.17
\end{aligned}$$

Felet blir alltså 0.17.

5.20g) F(s) = F$_{lead}$(s)F$_{lag}$(s)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e(t) \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+F_{lead}F_{lag}(s)G(s)} &= \frac{1}{1+4.9F_{lag}(s)} \\
&= \frac{(\tau_I s+\gamma)}{(\tau_I s+\gamma)+4.9(\tau_I s+1)} = \frac{\gamma}{\gamma+4.9}
\end{aligned}$$

För att felet ska elimineras måste vi sätta γ till 0.

5.20h) F(s) = F$_{lead}$(s)F$_{lag}$(s)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0.01 \implies \frac{\gamma}{\gamma+4.9} = 0.01 \implies \gamma \approx 0.049$$

Vi väljer τ_I som $10/\omega_{c,d} = 5$ enligt tumregel i boken. Detta ger en fasminskning på ungefär 5.7°. Ett för litet τ_I gör att fasmarginalen minskar för mycket. Ett för stort fungerar också dåligt i praktiken då det gör att slutvärdet bara uppnås för låga frekvenser.

6.3) Förstärkning av störningar (Nyquist)

Störningen förstärks då känslighetsfunktionen är större än ett:

$$\frac{1}{|1+F(s)G(s)|} > 1 \implies 1 > |1+F(s)G(s)|$$

Detta är en cirkel med mittpunkt i -1 och radie 1.

6.1) Förstärkning av störningar (Bestäm proportionell återkoppling)

Systemets känslighetsfunktion $S(s)$ fås från:

$$\begin{aligned} & Y(s) = V(s) + G(s)F(s)\left(R(s) - Y(s)\right) \\ \implies & Y(s)\left(1 + G(s)F(s)\right) = V(s) + G(s)F(s)R(s) \\ \implies & Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(1+G(s)F(s))}}_{S(s)} V(s) + \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{(1+G(s)F(s))}}_{G_c(s)} R(s) \end{aligned}$$

Med värden insatta fås känslighetsfunktionen:

$$S(s) = \frac{1}{\left(1 + K\frac{1}{s(s+1)}\right)}$$

Beloppet blir då:

$$|S(i\omega)| = \frac{|i\omega(i\omega+1)|}{|i\omega(i\omega+1)+K|} = \frac{|-\omega^2 + i\omega|}{|-\omega^2 + i\omega + K|} = \frac{\sqrt{\omega^4+\omega^2}}{(K-\omega^2)^2+\omega^2}$$

Med $\omega = 1$ fås:

$$|S(1i)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(K-1)^2+1}}$$

Eftersom $R(s) = 0$ fås att utsignalen helt bestäms av störningen. Kravet att $y(t)$ ska ha lägre amplitud än $v(t)$ ger därför att

$$|S(1i)| < 1 \implies \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(K-1)^2+1}} < 1 \implies 2 < (K-1)^2 + 1 \implies K > 2.$$