Rotort

Vi har tidigare sett hur storleken på återkopplingen kan påverka polplaceringen. Idag ska vi titta mer formellt på detta samband. Detta görs genom att betrakta en *rotort*. Rotorten är ett verktyg som vi har och kan använda bland annat när vi fattar reglerdesignbeslut. I praktiken ritar man inte själv ut rotorten utan man låter en dator göra det.

Exempel: skriv om polekvationen

Anta att vi återkopplat vårt system

$$G(s) = \frac{20}{s^2 + 10s + 29}$$

med regulatorn $F(s) = k_P + \frac{1}{s}k_I$. Polekvationen blir då:

$$\begin{aligned} 1 + F(s)G(s) = 0 \implies \\ s^3 + 10s^2 + (29 + 20k_P)s + 20k_I = 0 \end{aligned}$$

Vi är intresserade av hur polernas placering beror på k_P och k_I. Vi börjar med att kolla på hur de beror på k_P. Därför delar vi upp ekvationen i två polynom:

$$\underbrace{s^3 + 10s^2 + 29s + 20k_I}_{P(s)} + \underbrace{k_P}_{K} \cdot \underbrace{20s}_{Q(s)} = 0.$$

Vi kan nu skriva ekvationen som:

$$P(s) + K \cdot Q(s) = 0 \implies \frac{P(s)}{Q(s)} = -K \tag{1}$$

där $P(s)$ är ett polynom av n:te graden och $Q(s)$ är ett polynom av m:te graden. Det är rötterna till denna ekvation som vi plottar som en funktion av K.

Att rita en rotort

Vi ritar ut varje pols förflyttning som en "gren". Totalt finns n st grenar.

- Skriv om ditt polpolynom på formen $P(s) + KQ(s) = 0$ där K är varibeln som du vill variera
- Ändpunkter: Rötterna till $Q(s)$ motsvarar $K = \infty$ [m st]
- Startpunkter: Rötterna till $P(s)$ motsvarar $K = 0$ [n st]
- $a_1 = \sum \textit{startpunkter}$, $b_1 = \sum \textit{ändpunkter}$
- Asymptoter: Om $m < n$ kommer $(n - m)$ grenar gå mot oändligheten. De utgår från $-\frac{a_1 - b_1}{n-m}$ i riktningarna $\frac{\pi}{n-m}(1 + 2k)$ då $k = 0, \ldots, n - m - 1$
- Vi skär den imaginära axeln då $P(i\omega) + KQ(i\omega) = 0$
- De delar av reella axeln med ett udda antal reella start- eller ändpunkter till höger, tillhör rotorten.

Övningsuppgifter (3.33, 3.5, 3.6)

3.33

Med Newtons lag:

$$\begin{aligned} F = &\quad ma \quad \Rightarrow \\ u = &\quad m\ddot{y} \end{aligned} \tag{2}$$

Från uppgiftsbeskrivningen är det känt att $u = K_1(r-y) - K_1K_2\dot{y}$. Tillsammans med ekvation (3) fås:

$$\begin{aligned} K_1(r-y) - K_1K_2\dot{y} = m\ddot{y} &\quad \Rightarrow \\ m\ddot{y} + K_1y + K_1K_2\dot{y} = K_1r &\quad \Rightarrow \quad \{\text{Laplace}\} \\ Y(s)(ms^2 + K_1 + K_1K_2s) = K_1R(s) & \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen blir därför:

$$Y(s) = \frac{K_1}{ms^2 + K_1K_2s + K_1}R(s) \tag{3}$$

Och blockdiagrammet i figure 1 visar hur systemet funkar.

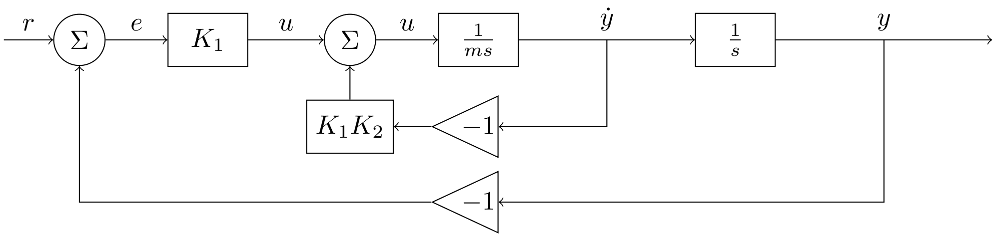

Fig. 1: Blockdiagram för astronautens position.

Krav 1: $e_1 \leq 1$

e_1 är det statiska felet då insignalen är en ramp ($u = k \cdot t$). Laplacetransformen av denna är $U(s) = \frac{k}{s^2}$. Överföringsfunktionen för felet lyder:

$$E(s) = (1 - G_c(s))R(s) = \left(1 - \frac{1}{ms^2 + K_1K_2 \cdot s + K_1}\right)R(s) = \frac{ms^2 + K_1K_2 \cdot s + (K_1 - 1)}{ms^2 + K_1K_2 \cdot s + K_1}R(s)$$

Eftersom att alla nollskilda poler har negativ realdel kan vi använda slutvärdessatsen på $E(s)$:

$$\lim_{s \to 0} sE(s)R(s) = \{\text{med } R(s) = s^{-2}\} = \lim_{s \to 0} \frac{ms^2 + K_1K_2 \cdot s + (K_1 - 1)}{s(ms^2 + K_1K_2 \cdot s + K_1)}$$

Insättning av $K_1 = 1$ ger nu att:

$$\lim_{s \to 0} \frac{ms^2 + K_1K_2 \cdot s}{s(ms^2 + K_1K_2 \cdot s + K_1)} = \frac{K_1K_2}{K_1} \Rightarrow K_2 \leq 1$$

Krav 2: $\zeta = 0.7$

ζ är systemets dämpning. Betrakta täljarpolynomet och lös ut ω_0 och ζ:

$$\begin{aligned} s^2 + K_1K_2/m \cdot s + K_1/m = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \Rightarrow \\ \omega_0 = \sqrt{K_1/m} \Rightarrow \\ K_1 = \left(\frac{2\zeta\sqrt{m}}{K_2}\right)^2 = \frac{196}{K_2^2} \end{aligned}$$

Svar: $K_1 = \frac{196}{K_2^2},\ K_2 \leq 1$

3.5 a)

Överföringsfunktionen är given:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

Polekvationen blir därför

$$G_o(s) = 0 \Rightarrow 1 + K \cdot G(s) = 0 \Rightarrow \underbrace{s(s+1)(s+3)}_{P(s)} + K\underbrace{(s+2)}_{Q(s)} = 0$$

Startpunkter:	s = 0, -1, -3	$(n = 3)$
Ändpunkter:	s = -2	$(m = 1)$

De delar av reella axeln som har ett udda antal start- eller ändpunkter är med i rotorten. Med $n = 3$, $m = 1$ får vi $(n - m) = 2$ asymptoter. Dessa utgår från punkten$-\frac{a_1 - b_1}{n-m} = -1$ och har riktningarna $\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ för $k = 1, 2$. Resultatet är rotorten i Figur 2.

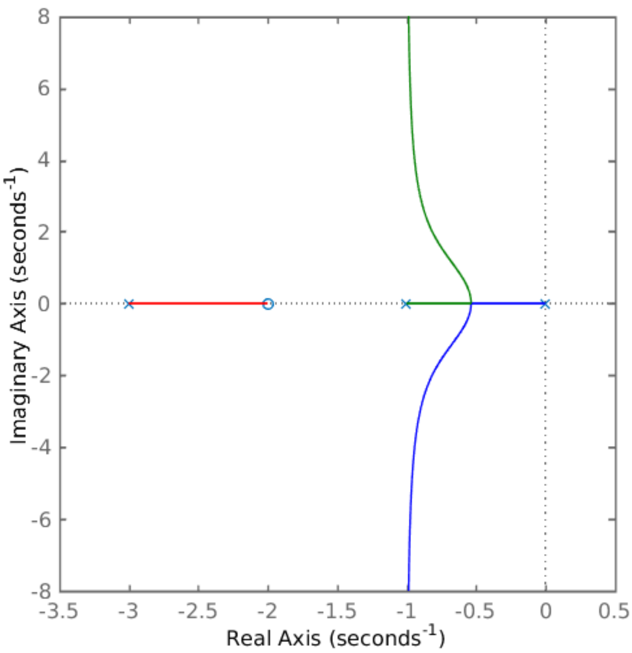

Fig. 2: Rotort tillhörande systemet i uppgift 3.5a)

3.6

Vi börjar med att härleda överföringsfunktionen. Först härleder vi den inre loopen. Vi kallar signalen in till inre loopen för $\dot{\Theta}_{ref}(s)$ eftersom att den blir en slags referens för vinkelhastigheten.

$$\dot{\Theta}(s) = K\frac{k}{1+sT}(\dot{\Theta}_{ref} - \alpha\dot{\Theta}(s)) \implies \dot{\Theta}(s) = \frac{kK}{1+s\tau+\alpha kK}\dot{\Theta}_{ref}(s)$$

Nu kan vi härleda det fullständiga systemet:

$$\Theta(s) = \frac{1}{s}\dot{\Theta}(s) = \frac{1}{s}\frac{kK}{1+s\tau+\alpha kK}\Theta_{ref}(s) - \Theta(s)$$
$$\implies \Theta(s) = \frac{kK/T}{s^2+s(1+\alpha kK)/T + kK/T}\Theta_{ref}(s)$$

vilket med insatta värden blir:

$$\Theta(s) = \frac{4k}{s^2+2(1+2\alpha k)s+4k}\Theta_{ref}(s)$$

a) $\alpha = 0$

$$\Theta(s) = \frac{4k}{s^2+2s+4k}\Theta_{ref}(s) \implies 4k + s^2 + 2s + 4k = 0$$

Detta ger att:

$P(s) = s^2 + 2s + 4k$	$\Rightarrow$	Startpunkter:	s = 0, -2	$(n = 2)$
$Q(s) = 4$		Ändpunkter:	inga	$(m = 0)$

De $(n-m) = 2$ asymptoterna utgår från punkten $-\frac{a_1-b_1}{n-m} = -\frac{2-0}{2-0} = -1$ och har riktningen $\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ for $k = 1, 2$. Resultatet visas i figur 3.

b) $\alpha = 1$

$$\Theta(s) = \frac{4k}{s^2+2(1+2k)s+4k}\Theta_{ref}(s)$$

Detta ger att:

$P(s) = s^2 + 2s + 4k$	$\Rightarrow$	Startpunkter:	$s = 0, -2$	$(n = 2)$
$Q(s) = 4 + 4s$		Ändpunkter:	$s = -1$	$(m = 1)$

$(n-m) = 1$ asymptot, som har riktningen $\pi + 2\pi \cdot k$ for $k = 1$. Resultatet visas i figur 4. Jämfört med resultatet i del a) så der vi en tydlig förbättring - rotorten blir inte längre starkt oscillerande då återkopplingen ökar.

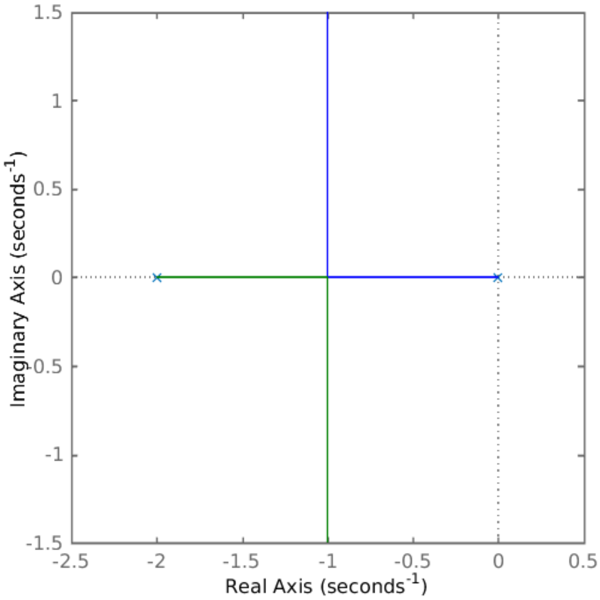

Fig. 3: Rotort tillhörande systemet i uppgift 3.6a)

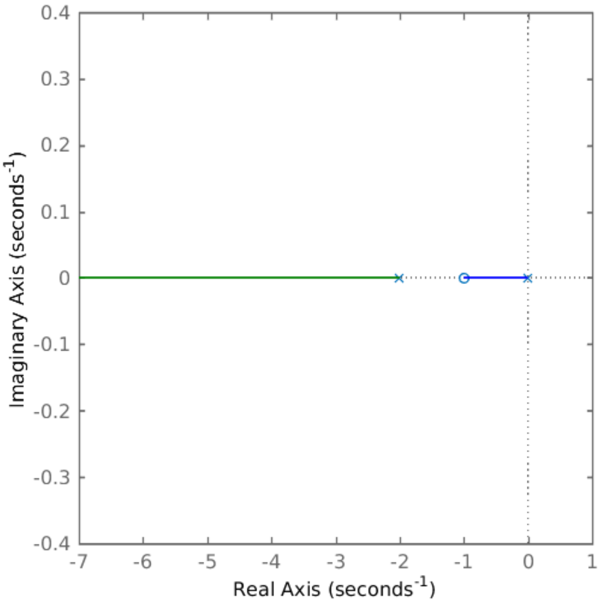

Fig. 4: Rotort tillhörande systemet i uppgift 3.6b)

d) $k = 1$

$$\Theta(s) = \frac{4}{s^2 + 2(1+2\alpha)s + 4}\Theta_{ref}(s) \implies \underbrace{s^2 + 2s + 4}_{P(s)} + \alpha \cdot \underbrace{2s}_{Q(s)} = 0$$

Detta ger att:

$$\begin{array}{lll} P(s) = s^2 + 2s + 4 & (n = 2) & \\ Q(s) = 4s & (m = 1) & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lll} \text{Startpunkter:} & s = -1 \pm \sqrt{3}i & (n = 2) \\ \text{Ändpunkter:} & s = 0 & (m = 1) \end{array}$$

$(n - m) = 1$ asymptoter, med riktningen π.

Den punkt där funktionen blir imaginär kan fås genom att lösa ut de värden av k som ger icke-reela rötter till $s^2 + (2 + 4\alpha)s + 4 = 0$. Med hjälp av t.ex. pq-formeln får vi att rötterna ges av

$$s = -(1 + 2\alpha) \pm \sqrt{(1 + 2\alpha)^2 - 4}$$

Utrycket blir icke-reelt då

$$1 + 4\alpha + 4\alpha^2 - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{cases} \Rightarrow \{\alpha \geq 0\} \Rightarrow s = -\sqrt{5}$$

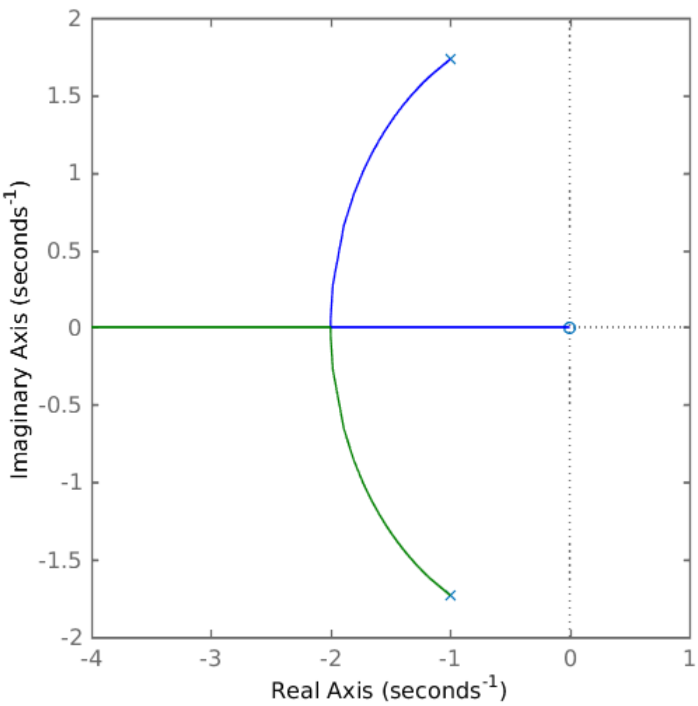

Fig. 5: Rotort tillhörande systemet i uppgift 3.6d)