Innehåll

- Återkopplade system
- Delarna i en PID

Reglera system

Förra veckan betraktade vi (mestadels) system utan styrning. Nu lägger vi även till styrning, genom att återkoppla utsignalen till systemets insignal.

Öppen styrning: När vi påverkar ett system med en insignal, utan att ta hänsyn till tillståndet hos systemet. Till exempel mikrovågsugn, diskmaskin, eller torktumlare.

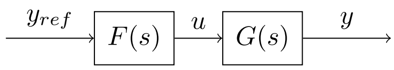

Fig. 1: Ett öppet system.G(s) är systemet vi vill reglera, och F(s) är regulatorn. Skillnaden mellan utsignal och önskad utsignal betecknas e.

$$G_o(s) = F(s)G(s) \tag{1}$$

Med återkoppling: När insignalen beror på tillståndet hos systemet, eller på en mätbar utsignal. Exempelvis bilkörning, segway, flygplan.

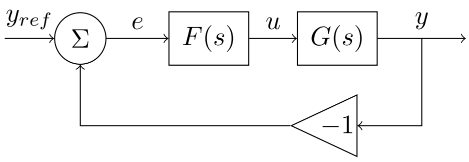

Fig. 2: Ett återkopplat system. G(s) är systemet vi vill reglera, och F(s) är regulatorn.

$$\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)F(s)\left(Y_{ref} - Y\right)) \\
\implies Y(s)\left(1 + G(s)F(s)\right) &= G(s)F(s)Y_{ref} \\
\implies Y(s) &= \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}Y_{ref}
\end{aligned} \tag{2}$$

PID-regulatorn

En PID-regulator består av tre delar. De tre delarna är:

Proportionell Agerar direkt på det nuvarande felet. För stor P-del kan leda till instabilitet.

Integrerande Tar felhistoriken i hänsyn. Effekten av en integrator i återkopplingen är att det statiska felet försvinner. Integrator kan leda till svängiga system eller oönskade signaler.

Deriverande Derivatadelen ger ett positivt bidrag när felet ökar, och mindre då felet minskar. Detta ger en dämpande effekt på systemet.

Observera att dessa delar var för sig har uppskattningsvis de angedda effekterna men att de i kombination kan vara mer komplicerade.

Övningsuppgifter

3.24

- Stegsvar **A** och **B** har ett statiskt fel - de kan därmed inte ha en nollskild I-del.
- **A** är mer dämpat än **B**, så dess derivatadel är större
- **C** är mer dämpat än **D**

$$i)\ B, \quad ii)\ D, \quad iii)\ A, \quad iv)\ C$$

3.1

a) Vi kan kontrollera flödesinställningen u, som därmed är vår *insignal.* Vi mäter höjden h, detta är vår *utsignal.* Utflödet v kan vi inte kontrollera, och det stör vår process - det är alltså en *störsignal.* Ytterligare två signaler i systemet är inflödet till tanken x och höjdändringen $\dot{h}$.

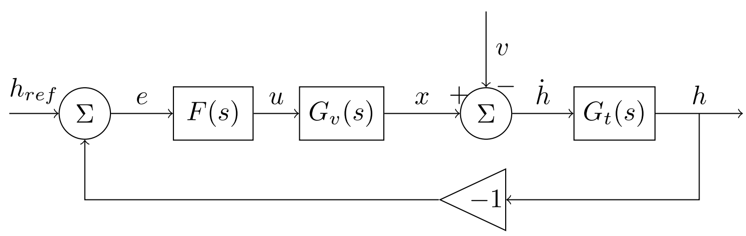

Fig. 3: Blockdiagram för tanksystemet i uppgift 3.1.

Eftersom att arean är 1 m^2 ges höjdderivatan av

$$\dot{h} = x - v.$$

Detta innebär att överföringsfuntionen för tanken ges av:

$$H(s) = \frac{1}{s}(X - V) \implies G_t(s) = \frac{1}{s} \tag{3}$$

b) Eftersom att överföringsfunktionen har sin enda pol i $s = -1/T$ så kan vi använda slutvärdesteoremet.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot G_v(s)U(s) = \lim_{s\to 0} G_v(s) = k_v$$

Från bild mäts detta värde upp till 2.

För att hitta T kan vi använda att vi vet att detta är tidskonstanten för en förstagradens differentialekvation.

$$\begin{aligned} T\dot{x}(t) + x(t) &= k_v \\ x(t) &= k_v(1 - e^{-t/T}) \\ \implies x(T) &= k_v(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

Då är T den tid då systemet uppnått $k_v\frac{e-1}{e} \approx 1.26$. Detta sker vid $t = 5$ s.

Svar: $k_v = 2,\ T = 5$.

c)

$$\begin{aligned} H(s) = \quad & G_t(s)(X(s) - V(s)) = \tfrac{1}{s}(G_v(s)F(s)(H_{ref}(s) - H(s)) - V(s)) \\ \Rightarrow \quad & H(s)(1 + \tfrac{1}{s}G_v(s)F(s)) = \tfrac{1}{s}G_v(s)F(S)H_{ref}(s) - \tfrac{1}{s}V(s) \\ \Rightarrow \quad & H(s) = \tfrac{G_v(s)F(s)}{s+G_v(s)F(S)}H_{ref}(s) - \tfrac{1}{s+G_v(s)F(S)}V(s) \end{aligned}$$

Detta ger oss de två överföringsfunktionerna:

$$\frac{H(s)}{H_{ref}(s)} = \frac{G_v(s)F(s)}{s + G_v(s)F(s)} \tag{4}$$

$$\frac{H(s)}{V(s)} = -\frac{1}{s + G_v(s)F(s)} \tag{5}$$

d) Med en proportionell regulator $F(s) = K$ blir polpolynomet till (4) och (5):

$$s + K\frac{k_V}{1+Ts} = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{Kk_V}{T} = 0$$

Denna andragradsekvation har lösningen:

$$\begin{aligned} s &= -\frac{1}{2T} \pm \sqrt{\frac{1}{4T^2} - \frac{Kk_V}{T}} \\ \Rightarrow s &= -\frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{2K}{5}} \\ \Rightarrow s &= \frac{1}{10}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 40K}\right) \end{aligned}$$

För att polerna ska ligga innanför konen krävs att beloppet av imaginärdelen är mindre än beloppet av realdelen. Systemet har en imaginärdel om $K > \frac{1}{40}$. Om systemet har imaginärdel måste realdelen vara -1. Detta ger olikheten:

$$\sqrt{1-40K} < i$$

vi börjar med att dra ut imaginärdelen på båda sidorna. Detta kan göras under antagandet att $K > 0.025$ Om K är

$$\begin{aligned}
\sqrt{40K-1}\cdot i &< i \\
\Rightarrow 40K-1 &< 1 \\
\Rightarrow 40K &< 2 \\
\Rightarrow K &< \frac{2}{40} = 0.05
\end{aligned}$$

Svar: $K < 0.05$

e) Överföringsfunktionen för feltermen ges av:

$$\begin{aligned}
E(s) &= H_{ref}(s) - H(s) \\
&= \left(1 - \frac{G_v(s)F(s)}{s+G_v(s)F(s)}\right) H_{ref}(s) + \frac{1}{s+G_v(s)F(s)} V(s) \\
&= \frac{s}{s+G_V(s)F(s)} H_{ref}(s) + \frac{1}{s+G_v(s)F(s)} V(s)
\end{aligned} \tag{6}$$

Slutvärdessatsen ger då att:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \{H_{ref} = 0\} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+G_v(s)F(s)} V(s) = \frac{1}{Kk_v} = \frac{1}{2K}$$

Vi kan från detta se att ett större K ger ett mindre statiskt fel, samtidigt som vi från förra uppgiften vet att ett för stort K leder till ett mer oscillerande system. Detta är en avvägning man måste ta hänsyn till när man bestämmer sin regulator.

f) Byt ut den proportionella regulatorn K mot en PI-regulator $F(s) = K_p + K_i\frac{1}{s}$. På samma sätt som ovan fås:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+G_v(s)(K_p + K_i\frac{1}{s})} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+2(K_p s + K_i)} V(s) = 0$$

Som väntat så försvann felet när vi introducerade en integrerande del!