Tidsdiskreta system

- Att övergå från kontinuerlig till diskret tid är nödvändigt så vi implementerar våra regulatorer i datorer.
- Differentialekvarioner → differensekvationer
- För att gå mellan kontinuerlig och diskret tid måste vi approximera tidsderivatan

Approximering (Kapitel 10.2)

Euler bakåt:

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_e x(t) = \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right)$$

Tustins formel:

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t) =$$

där Δ_t ges av:

$$\frac{1}{2}\left(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)\right) = \frac{1}{T}\left(x(t) - x(t-T)\right)$$

Vi tänker på operationen "att ta derivatan av någonting" och ger denna operator betäckningen p:

$$px(t) = \dot{x}(t)$$

På samma sätt vill vi införa en operator för motsvarande handling i diskret tid. För att kunna göra detta införs förskjutningsoperatorn:

$$\begin{aligned} qx(t) &= x(t+T) \\ q^{-1}x(t) &= x(t-T) \end{aligned}$$

Med denna notation kan vi uppskatta Euler bakåt som:

$$px(t) \approx \frac{1}{T}\left(1 - q^{-1}\right)x(t) \implies p \approx \frac{1}{T}(1 - q^{-1})$$

och Tustins formel som:

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$$

där Δ_t ges av:

$$\frac{1}{2}\left(1 + q^{-1}\right)\Delta_t x(t) = \frac{1}{T}\left(1 - q^{-1}\right)x(t) \implies p \approx \frac{2}{T}\frac{1 - q^{-1}}{1 + q^{-1}}$$

Sampling (Kapitel 10.3)

Om vi samplar med samplingsfrekvensen $\omega_s = 2\pi/T$ men vårt system innehåller frekvenser över $\omega_N = \omega_s/2$ går viss information förlorad. Vi kommer inte längre kunna urskilja frekvenser högre än Nyquistfrekvensen ω_N. Dessa frekvenser kommer istället vara identiska med lägre frekvenser, vilket kallas "aliaseffekten".

Övningsuppgifter (11.2, 11.1, 11.3)

11.2) Diskretisering

Betrakta systemet

$$\dot{y}(t) = u(t) \tag{1}$$

med konstant insignal för varje samplingsintervall:

$$u(t) = u_k,\ kT \leq t \leq (k+1)T \tag{2}$$

11.2a) Relation mellan y_{k+1}, y_k, u_k

Vi vill härleda en relation mellan y_k och y_k och u_k. Från (2) ser vi att insignalen är konstant mellan två samplingspunkter.

$$\begin{aligned} y_k &= y(kT) \\ u_k &= y(kT) \\ y_{k+1} &= y((k+1)T) \end{aligned}$$

Vi integrerar båda sidor av (1):

$$\begin{aligned} \int_{kT}^{(k+1)T} \dot{y}(t)dt &= \int_{kT}^{(k+1)T} u_k dt \\ \implies y((k+1)T) - y(kT) &= ((k+1)T - kT)\, u_k \\ \implies y_{k+1} - y_k &= Tu_k \end{aligned}$$

11.2b) Proportionell återkoppling

Vi återkopplar med

$$u_k = -Ky_k$$

och får systemekvationen:

$$y_{k+1} - y_k = -TKy_k \implies = y_{k+1} = (1 - TK)y_k$$

För att systemet ska vara asymptotiskt stabilt vill vi att $y_i \to 0$ då $i \to \infty$

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_1 &= (1 - TK)y_0 \\ y_2 &= (1 - TK)y_1 = (1 - TK)^2 y_0 \\ &\vdots \\ y_N &= (1 - TK)^N y_0 \end{aligned}$$

På grund av den rekursiva naturen hos systemet ser vi att beloppet av $(1-TK)$ måste vara mindre än ett:

$$\begin{aligned} &|1 - TK| < 1 \\ \implies &-1 < 1 - TK < 1 \\ \implies &0 < K < \frac{2}{T} \end{aligned}$$

11.1) Tustins formel

Skriv om:

$$U(s) = KN\frac{s+b}{s+bN}E(s)$$

med Tustins formel och identifiera parametrarna:

$$u(t) = \beta u(t-T) + \alpha_1 e(t) + \alpha_2 e(t-T)$$

Tustins formel approximerar:

$$p \approx \frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}$$

Vi skriver om systemet med invers Laplace:

$$\begin{aligned} su(t) + bNu(t) &= KNse(t) + KNbe(t) \\ \dot{u}(t) + bNu(t) &= KN\dot{e}(t) + KNbe(t) \\ pu(t) + bNu(t) &= KNpe(t) + KNbe(t) \end{aligned}$$

Observera hur s och p motsvarar varandra, där s är en komplexvärd variabel och p är en operator.

Approximerat med Tustins formel blir detta:

$$\frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}u(t) + bNu(t) = KN\frac{2}{T}\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}e(t) + KNbe(t)$$

$$\implies \frac{2}{T}(1-q^{-1})u(t) + (1+q^{-1})bNu(t) = \frac{2KN}{T}(1-q^{-1})e(t) + (1+q^{-1})KNbe(t)$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{2}{T}u(t) - \frac{2}{T}u(t-T) + bNu(t) + bNu(t-T) \\ = \frac{2KN}{T}e(t) - \frac{2KN}{T}e(t-T) + KNbe(t) + KNbe(t-T) \end{aligned}$$

Med insatta värden: $T = 0.1$, $K = 2$, $N = 10$, $b = 0.1$

$$\begin{aligned} &20u(t) - 20u(t-T) + u(t) + u(t-T) = 400e(t) - 400e(t-T) + 2e(t) + 2e(t-T) \\ \implies &21u(t) - 19u(t-T) = 402e(t) - 398e(t-T) \\ \implies &u(t) = \frac{19}{21}u(t-T) + \frac{402}{21}e(t) - \frac{398}{21}e(t-T) \end{aligned}$$

Så de eftersökta värderna blir:

$$\begin{aligned} \beta &= 0.905 \\ \alpha_1 &= 19.14 \\ \alpha_2 &= -18.95 \end{aligned}$$

11.3) Sampling

Vi har en insignal som först filtreras och sedan samplas. Insignalen ges av $u = u_0 + u_1$ där u_1 är en störterm med frekvens ω_2:

$$u_1 = \sin \omega_2 t$$

där $\pi/T < \omega_2 < 2\pi/T$.

Utsignalen kommer att ges av $y = y_0 + y_1$ där y_1 motsvarar effekten av störsignalen:

$$y_1 = A \sin(\omega_1 kt + \phi)$$

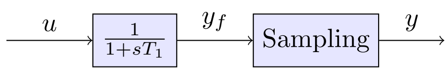

Fig. 1: I uppgift 11.3 går signalen u först genom ett lågpassfilter och samplas sedan med samplingsintervallet T.

11.3a)

Vi noterar att störsignalen har en frekvens som är större än Nyquistfrekvensen:

$$\omega_2 > \omega_N.$$

Detta gör att störsignalen efter sampling y_1 kommer att ha en annan frekvens än störsignalen i början av systemet u_1. Detta är "aliaseffekten".

Efter filtret: Störningens värde efter filtret men före samplingen är

$$y_{f,1}(t) = |G(i\omega_2)| \sin(\omega_2 t + \psi)$$

där $\psi = \arg G(i\omega_2) = -\arctan \omega_2 T_1$.

Efter sampling: Signalen samplas med frekvensen $\omega_s = 2\pi/T$. Sampling vid kT ger för störningen:

$$y_1(kT) = |G(i\omega_2)| \sin(\omega_2 kT + \psi)$$

Sätt $\omega_1 = \omega_s - \omega_2$:

$$\begin{aligned}
y_1(kT) &= |G(i\omega_2)| \sin(\omega_2 kT + \psi) \\
&= |G(i\omega_2)| \sin((\omega_s - \omega_1)kT + \psi) && \{\omega_s = 2\pi/T\} \\
&= |G(i\omega_2)| \sin(-kT\omega_1 + \psi) && \{\sin(-x) = \sin(x + \pi)\} \\
&= |G(i\omega_2)| \sin(kT\omega_1 + \pi - \psi)
\end{aligned}$$

Vilket ger:

$$A = |G(i\omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_2^2 T_1^2}}$$
$$\phi = \pi - \phi = \pi + \arctan \omega_2 T_1$$

11.3b)

Vad är den minsta uppnåerliga störsignalamplitud om vi inte vill dämpa frekvenser i u_0 mer än $\sqrt{2}$?

För att få amplituden så liten som möjligt vill vi göra T_1 så stort som möjligt. Hur stort vi kan välja T_1 begränsas av den maximala dämpningen på "den intressanta signalen".

Vi dämpar med $\sqrt{2}$ då $\omega = \omega_B$. Filtrets bandbredd ges av:

$$\left|\frac{1}{1 + i\omega_B T_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies 1 + T_1^2\omega_B^2 = 2 \implies \omega_B = \frac{1}{T_1}.$$

Den största godkända amplituddämpningen fås vid $\omega_B = 1/T_1$. Eftersom att u_0 har frekvensen $0 < \omega < \pi/T$ fås att:

$$\begin{aligned} &\omega < \omega_B \\ \implies &\frac{\pi}{T} < \frac{1}{T_1} \\ \implies &T_1 < \frac{T}{\pi} \end{aligned}$$

För att maximera dämpningen av störningen sätter vi $T_1 = T/\pi$. Detta ger amplituden:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_2^2 T_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_2^2 \frac{T^2}{\pi^2}}}$$