Framkoppling (Kapitel 7.3)

Framkoppling kan ske bland annat från en uppmätt störsignal eller från en referenssignal.

För att eliminera inverkan av störning kopplar vi den uppmätta störningen till insignalen.

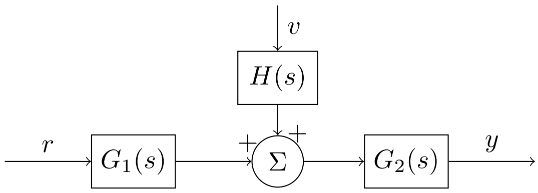

Fig. 1: System som påverkas av störsignal v och referenssignal r.

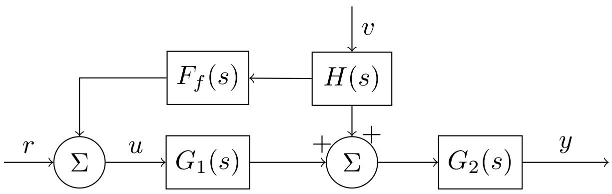

Fig. 2: Framkopplat system som påverkas av störsignal v och referenssignal r.

Övningsuppgifter (9.4, 9.8)

9.4

Vi vill att polerna för systemet:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

hamnar i $\{-2, -3\}$. Föreslå en observatör och använd en tillståndsåterkoppling.

Med $u = -\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} x + r$ fås:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 \\ -l_1 & -1 - l_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

Och observatören blir:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix} (y - C\hat{x})$$

För polerna löser vi:

$$\det \begin{bmatrix} s+l_1 & l_2 \\ l_1 & s+1+l_2 \end{bmatrix} = 0 \implies (s+l_1)(s+1+l_2) - l_1 l_2 = 0$$
$$\implies s^2 + (1+l_1+l_2)s + l_1 = 0$$

För poler i $\{-2,-3\}$ fås:

$$(s+2)(s+3) = s^2+5s+6 \implies \begin{cases} l_1 = 6 \\ l_2 = -2 \end{cases}$$

Vilket get oss regulatorn:

$$u = -6x_1 + 2x_2 + r$$

Med dessa poler är det rimligt att sätta polerna till observatörekvationen i $\{-4,-4\} \implies (s+4)(s+4) = s^2+8s+16$. Med observatören:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

där $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$ fås polerna från:

$$\det(sI - (A-KC)) = \det \begin{bmatrix} s+k_1 & -k_1 \\ k_2 & s-k_2+1 \end{bmatrix} = s^2 + s(1+k_1-k_2) + k_1$$

Identifiering av koefficienter ger

$$k_1 = 16$$
$$k_2 = 9$$

9.8) Tankprocess

Målet är att reglera en tankprocess så att den uppnår önskad höjd. De intressanta storheterna är (relativt arbetspunkt):

Insignal:	u
Tillstånd:	h, q
Störning:	v

Valvet styrs av:

$$Q(s) = \frac{k_1}{1+Ts} U(s) \tag{1}$$

och nivån i tanken ändras som:

$$A\dot{h} = q - v. \tag{2}$$

Vi är givla värden för konstanterna:

$$A = 1 \text{ m}^2$$
$$T = 0.5$$
$$k_1 = 1$$

9.8a) Polplacering

Målet är att placera båda polerna i -2. Vi börjar med att hitta en tillståndsrepresentation. Valvets överföringsfunktion kan skrivas om som:

$$q(t) + T\dot{q}(t) = k_1 u(t) \implies \dot{q}(t) = -\frac{1}{T}q(t) + \frac{k_1}{T}u(t)$$

och tanken kan skrivas som:

$$\dot{h} = \frac{1}{A}q(t) - \frac{1}{A}v(t).$$

På tillståndsform blir detta:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A} \end{bmatrix} v \\ =\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v\end{aligned}$$

Kolla styrbarheten:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \det \mathcal{S} \neq 0 \implies \text{Systemet styrbart.}$$

Vi återkopplar med $u = -\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} x + r$. Detta ger oss det stängda systemet:

$$\dot{x} = Ax + B(-Lx + r) + Fv = (A - BL)x + Br + Fv$$

Detta system har den karaktäristiska ekvationen

$$\det(sI - (A - BL)) = \det \begin{bmatrix} s + 2 + 2l_1 & 2l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + s(2 + 2l_1) + 2l_2 = 0$$

Om vi placerar polerna i $\{-2, -2\}$ fås:

$$(s + 2)(s + 2) = s^2 + 4s + 4 \implies \begin{cases} l_1 = 1 \\ l_2 = 2 \end{cases}$$

Återkopplingen blir alltså:

$$u = -q - 2h + r \tag{3}$$

och det slutna systemet ges av:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v$$

9.8b) Statiskt fel

Om $v = 0.1$ och $r = 0$, vad blir det statiska felet?

Vi betraktar funtionen vid statrionäritet, det vill säga då derivatorna är noll.

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v = 0 \implies \begin{cases} h = -q \\ q = 0.1 \end{cases}$$

Så felet i höjden är -0.1.

9.8c) Framkoppling

Gör framkoppling från v till r så att influensen från v försvinner. Ta bort termer som relaterar till derivatan av v.

För att ta reda på detta måste vi hitta överföringsfunktionen från störning till höjden.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= q - v \\ \dot{q} &= -4q - 4h + 2r \end{aligned} \implies \begin{aligned} H(s) &= \tfrac{1}{s}\left(Q(s) - V(s)\right) \\ Q(s) &= \tfrac{4}{s+4}H(s) + \tfrac{2}{s+4}R(s) \end{aligned}$$

Den fullständiga överföringsfunctionen från R och V till H ges av:

$$H(s) = \underbrace{\frac{2}{s^2+4s-4}}_{G_r(s)} R(s) - \underbrace{\frac{s+4}{s^2+4s-4}}_{G_v(s)} V(s). \tag{4}$$

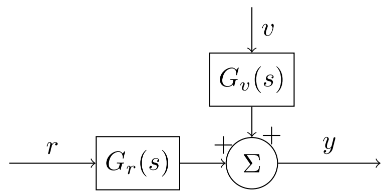

Fig. 3: Systemet i ekvation (4)

Vi kopplar störningen v till referensen r via framkopplingslänken $F_f(s)$:

$$R(s) = F_f(s)V(s) \implies H(s) = \left(G_r(s)F_f(s) + G_v(s)\right)V(s).$$

Om vi nu väljer $F_f(s) = -\frac{G_v(s)}{G_r(s)}$ så blir framkopplingen:

$$F_f(s) = \frac{s+4}{2} = \frac{1}{2}s + 2.$$

Eftersom att vi vill undvika att inkludera derivatan av störningen (som kan vara mycket brusig!) i insignalen så väljer vi att enbart ta med den proportionella delen:

$$F_f(s) = -2 \implies r = 2v.$$

Detta ger vid stationäritet

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} v = 0 \implies \begin{cases} -q - h + v = 0 \\ q = v \end{cases} \implies h = 0$$

9.8d) Annat värde på k_1

Konstanten k_1 påverkar hur flödet q beror av insignalen u enligt ekvation (1). Den nya ekvationen blir nu:

$$\dot{q} = -2q + 2k_1 u,$$

vilket ändrar systemets B-matris till:

$$B = \begin{bmatrix} 2k_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Med återkopplingen i (3) blir slutna systemets A-matris:

$$A - BL = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2k_1 & 4k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2k_1 & -4k_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom att $r = 2v$ fås det nya systemet:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2-2k_1 & -4k_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1 \\ 0 \end{bmatrix} 2v + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} v$$

Polerna ges nu av:

$$\det \begin{bmatrix} s+2+2k_1 & 4k_1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + 2(1+k_1)s + 4k_1 = 0$$

Om $k_1 > 0$ är systemet stabilt (enligt Rouths algoritm, s. 45). Under antagandet att $k_1 > 0$ får vi i stationärt tillstånd:

$$\begin{bmatrix} -2(1+k_1) & -4k_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k_1 \\ -1 \end{bmatrix} v = 0 \implies \begin{cases} -2(1+k_1)q - 4k_1 h + 4k_1 v = 0 \\ q = v \end{cases}$$

Detta ger:

$$\begin{aligned} & -2v - 2k_1 v - 4k_1 h + 4k_1 v = 0 \\ \implies & -v - 2k_1 h + k_1 v = 0 \\ \implies & -2k_1 h + (k_1 - 1)v = 0 \\ \implies & h = \frac{k_1 - 1}{2k_1} v. \end{aligned}$$

Med $k_1 \neq 1$ ger detta ett statiskt fel.

9.8e) Utöka tillståndsrepresentationen

Vi ska ändra på regulatorn för att göra systemet robust mot skillnader i k_1.

För detta introducerar vi integralen av höjden som ett tillstånd z.

$$z = \int_0^t h(\tau)\, d\tau \implies \dot{z} = h$$

Med det nya tillståndet styrs systemet av:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ h \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ h \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Kolla styrbarheten:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 2k_1 & -4k_1 & 4k_1 \\ 0 & 2k_1 & -2k_1 \\ 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \implies \det \mathcal{S} \neq 0 \text{ om } k_1 \neq 0 \implies \text{Systemet styrbart.}$$

Återkoppling med $u = -\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} x$ ger:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ h \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2k_1l_1 & -2k_1l_2 & -2k_1l_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ h \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Under antagandet att vi väljer L så att det stabiliserar systemet (vilket vi kan, eftersom att systemet är styrbart) kommer det statiska felet ges av:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2-2k_1l_1 & -2k_1l_2 & -2k_1l_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} v = 0$$

$$\implies \begin{cases} -2(1+k_1l_1)q - 2k_1l_2h - 2k_1l_3z = 0 \\ q = v \\ h = 0 \end{cases}$$

Så höjden kommer att gå mot 0.