Styrbarhet och Observerbarhet

Styrbarhet. *Ett tillstånd $x^\star$ kallas för styrbart om en insignal existerar s.a. den tar tillståndsvekrorn x från origo till $x^\star$på ändlig tid. Ett system kallas för styrbart om alla tillstånd är styrbara.*

Styrbarhetsmatrisen ges av:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Styrbara tillstånd ligger i span($\mathcal{S}$). Systemet är styrbart om span($\mathcal{S}$) $= \mathbb{R}^n$, vilket är ekvivalent med att $\det \mathcal{S} \neq 0$.

Observerbarhet. *Ett tillstånd $x^\star$ kallas för icke-observerbart om utsignalen är identiskt 0 då $x(0) = x^\star$ och insignalen är 0. Ett system kallas för icke-observerbart om alla tillstånd är icke-observerbara.*

Observerbarhetsmatrisen ges av:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Icke-observerbara tillstånd ligger i ker($\mathcal{O}$). Systemet är observerbart om det saknar icke-observerbara tillstånd, vilket är ekvivalent med att rank($\mathcal{O}$) $= n$ d.v.s. om det($\mathcal{O}$) $\neq 0$.

Tillståndsåterkoppling

- Utnyttja att vi känner till hela systemets tillstånd vid regulatorkonstruktionen. $\Longrightarrow$ Återkoppla med tillståndet!
- Nya egenvärden kan placeras godtyckligt om systemet är styrbart (s. 183).

Observatör

- Ofta kan vi inte mäta alla tillstånd, utan vi måste uppskatta det.
- Observatören är ett dynamiskt system i sig som simulerar det ursprungliga systemet.
- Egenvärden kan placeras godtyckligt om systemet är observerbart (s. 193).

Övningsuppgifter (8.13, 8.10, 9.1)

8.13) Två pendlar på en vagn

Två inverterade pendlar balanserar på en vagn, på ett sådant sätt att de för sig utan friktion i samma plan som vagnen rör sig.

Massan är för båda pendlarna m. Längden på den första pendeln är l och längden på den andra pendeln är αl.

Första pendelns ekvation är:

$$\ddot{z}\cos\phi_1 + \ddot{\phi}_1\alpha l = g\sin\phi_1$$

Andra pendelns ekvation är:

$$\ddot{z}\cos\phi_2 + \ddot{\phi}_2 l = g\sin\phi_2$$

8.13a) Linjärisera kring $\phi = 0$ med $l = m = g = 1$

De två ekvationerna blir:

$$\ddot{z}\cos\phi_1 + \ddot{\phi}_1\alpha = \sin\phi_1, \quad \ddot{z}\cos\phi_2 + \ddot{\phi}_2 = \sin\phi_2$$

Introducera tillstånden $x_1 = \phi_1$, $x_2 = \dot{\phi}_1$, $x_3 = \phi_2$, $x_4 = \dot{\phi}_2$

Vi har alltså funktionerna:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{\phi}_1 = x_2 && := f_1(x,u)\\
\dot{x}_2 &= \ddot{\phi}_1 = \frac{1}{\alpha}\left(\sin x_1 - \ddot{z}\cos x_1\right) && := f_2(x,u)\\
\dot{x}_3 &= \dot{\phi}_2 = x_4 && := f_3(x,u)\\
\dot{x}_4 &= \ddot{\phi}_2 = \sin x_3 - \ddot{z}\cos x_3 && := f_4(x,u)
\end{aligned}$$

För linjärisering kring $\phi_1 = \phi_2 = 0$ måste vi först hitta z. Den stationära punkten fås där $f_1(x^0,u^0) = f_2(x^0,u^0) = f_3(x^0,u^0) = f_4(x^0,u^0) = 0$.

$$\begin{aligned}
f_1(x^0,u^0) &= 0\\
f_2(x^0,u^0) &= \frac{1}{\alpha}\left(\sin(0) - \ddot{z}\cos(0)\right) = -\frac{1}{\alpha}\ddot{z}\\
f_3(x^0,u^0) &= 0\\
f_4(x^0,u^0) &= \sin(0) - \ddot{z}\cos(0) = -\ddot{z}
\end{aligned}$$

Från detta ser vi att $\ddot{z} = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha}\cos(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cos(0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{du} \\ \vdots \\ \frac{df_n}{du} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -cos(0) \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha}cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Det linjära systemet är alltså:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Där $x = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dot{\phi}_1 & \phi_2 & \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}^T$ och $u = \ddot{z}$

8.13b) För vilka α är systemet styrbart?

Beräkna styrbarhetsmatrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet är styrbart om $rank(\mathcal{S}) = n = 4$. Kolla efter linjärt oberoende: Vi ser på $\mathcal{S}$ att det är två par av kolumner:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\alpha^2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dessa par är linjärt oberoende om $\alpha \neq 1$. Det vill säga systemet är styrbart om längden på de två pendlarna är olika. Med olika längd kommer pendlarna att reagera olika på insignalen. Om längden däremot är samma finns det inget sätt att reglera dem separat.

8.10) Styrbara och icke-observerbara underrum

Hitta de styrbara och icke-observerbara underrummen.

8.10a)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Styrbarhet:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{bmatrix}$$

Använd till exempel radreducering för att hitta rank:

$$\mathcal{S} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ranken är alltså två, med:

$$-6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Två linjärt oberoende vektorer är alltså:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Observerbarhet:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ser direkt att komuln två och tre är linjärt beroende. Rank är 2. Det icke-observerbara underrummet spänns av en vektor:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

9.1) Tillståndsåterkoppling och observatörer

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

9.1a) Tillståndsåterkoppling

Välj tillståndsåterkoppling s.a. poler hamnar i:
I) $\{-3, -5\}$
II) $\{-10, -15\}$

Kolla om system är styrbart:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies rank(\mathcal{S}) = 2 \implies \text{Styrbart!}$$

Välj $u = -Lx + l_0 r$:

$$\dot{x} = Ax - BLx + Br = (A - BL)x + Bl_0 r$$

Med $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$:

$$A - BL = \begin{bmatrix} -2 - l_1 & -1 - l_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polerna fås av matrisens egenvärden:

$$\text{eig} \begin{bmatrix} -2 - l_1 & -1 - l_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvärden fås från rötterna till determinanten:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - (A - BL)) &= \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 + l_1 & 1 + l_2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + (1 + l_2) \end{aligned}$$

Vi vill att dessa lösningar ska passa med de i uppgiften givna polerna:

$$\begin{aligned} &\text{I) } (s+3)(s+5) = s^2 + 8s + 15 && \implies l_1 = 6, \quad l_2 = 14 \\ &\text{II) } (s+10)(s+15) = s^2 + 25s + 150 && \implies l_1 = 23, \quad l_2 = 149 \end{aligned}$$

Detta ger de två tillståndsåterkopplingarna:

$$\begin{aligned} u_I &= -6x_1 - 14x_2 + l_0 r \\ u_{II} &= -23x_1 - 149x_2 + l_0 r \end{aligned}$$

Insignalen är i verkligheten begränsad och vi kan därför inte godtyckligt välja poler. Vi ser att u_{II} kommer ha betydligt större insignal än x_1.

9.1b) Observatör

Vi antar att utsignalen men ej tillstånden är mätbara. Då måste vi använda en observatör för att uppskatta tillståndet.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \implies \det(\mathcal{O}) = -1 \implies \text{Observerbar!}$$

Vår observatör får formen:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{x})$$

där $\hat{x}$ är det uppskattade tillståndet.

Skillnaden mellan tillståndet och det uppskattade tillståndet ges av:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(y - C\hat{x}) \\ &= A(x - \hat{x}) - KC(x - \hat{x}) = (A - KC)(x - \hat{x}) \end{aligned}$$

Med $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$:

$$A - KC = \begin{bmatrix} -2 - k_1 & -1 \\ 1 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Polerna fås av matrisens egenvärden:

$$\text{eig} \begin{bmatrix} -2 - k_1 & -1 \\ 1 - k_2 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} s + 2 + k_1 & 1 \\ -1 + k_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + s(2 + k_1) + (1 - k_2)$$

Polerna bör placeras så att observatör är snabbare än systemet! Placera exempelvis polerna i $\{-20, -20\}$.

$$(s + 20)(s + 20) = s^2 + 40s + 400 \implies \quad k_1 = 38, \; k_2 = 398.$$

$$\implies \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \begin{bmatrix} 38 \\ 398 \end{bmatrix} (y - C\hat{x})$$