Linjära differentialekvationer

I denna kurs behandlar vi linjära differentialekvationer på formen:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u \tag{1}$$

Lösningen beräknas som summan av en *homogen lösning* (även kallad allmän lösning) och en en *partikulärlösning*:

$$y = y_h + y_p$$

Homogen lösning: Den homogena lösningen är lösningen till motsvarande homogena differentialekvation, och fås från lösningen till det karakteristiska polynomet:

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n) = 0$$

Denna ekvation har n stycken rötter, som antingen är:

- reella tal: $\lambda = p$
- komplexa talpar: $\lambda_1 = a + bi, \quad \lambda_2 = a - bi$

Rötterna ger oss den homogena lösningen som:

$$y_h(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^{\lambda_j t}$$

där λ_j är den j:te roten och α_j är koefficienter. Notera att

- Om λ_j har positiv realdel så växer y_h obegränsat
- Om imaginärdelen är 0 blir bidraget rent exponentiellt.
- Ett komplext talpar ger oscillationer (tänk på Eulers formel). Ju större imaginärdel desto mer kommer det osciellera.

Partikulärlösning: Denna hittas ofta genom att man ansätter att en lösning ska ha en viss form, för att därefter lösa ut konstanterna.

Exempel: första ordningens system

Lös följande differentialekvation:

$$10\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t) \tag{2}$$

med insignal $u(t) = 1$ då y(0) = 0.

Den homogena lösningen fås av:

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{10} y(t) = 0$$

Koeffecienteren är således $a_1 = \frac{1}{10}$ och det karakteristiska polynomet ger:

$$\lambda + \frac{1}{10} = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{10} \implies y_h = Ce^{-1/10t}$$

För partikulärlösningen ses direkt lösningen $y_p = 2$. Från detta vet vi att differentialekvationen har formen $y(t) = Ce^{-1/10t} + 2$. Den sista konstanten löser vi ut från begynnelsevilkoret:

$$y(0) = Ce^0 + 2 = 0 \implies C = -2$$

Stegsvaret visas i Fig. 1.

Svar: $y(t) = 2\left(1 - e^{-1/10t}\right)$

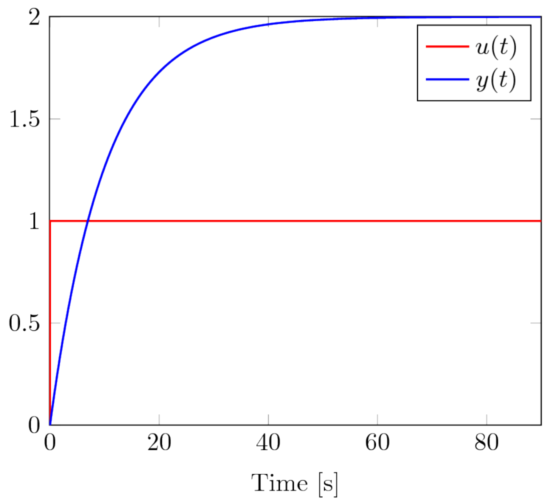

Fig. 1: Stegsvaret för ekvation (2).