Föreläsning 9

SF1633 Differentialekvationer, HT18, Kurt Johansson

Inhomogena linjära system

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{F}(t) \quad , \; n\times n\text{-system} \qquad (1)$$

Om $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ är linjärt oberoende lösningsvektorer till motsvarande homogena ekvation,

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x},$$

och $\bar{x}_p$ är en partikulärlösning till (1), dvs.

$$\bar{x}_p' = A(t)\bar{x}_p + \bar{F}(t),$$

så ges den allmänna lösningen till (1) av

$$\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + \dots + c_n\bar{x}_n + \bar{x}_p \qquad (2)$$

En <u>fundamentalmatris</u> ges av

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = (\bar{x}_1 \; \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n).$$

$$\underbrace{}_{\bar{x}_1} \quad \underbrace{}_{\bar{x}_2} \quad \dots \quad \underbrace{}_{\bar{x}_n}$$

Den allmänna lösningen kan skrivas

$$\bar{x} = \Phi(t)\bar{c} + \bar{x}_p \quad , \; \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Att $\Phi(t)$ är en fundamentalmatris innebär att

(1) $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad , t \in I$ (3)

(2) $\det \Phi(t) \neq 0 \quad , t \in I$ (Wronskianen $\neq 0$)

(1) innebär att kolonnvektorerna $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ i Φ löser den homogena ekvationen. (2) innebär att de är linjärt oberoende.

Variation av parametrar

Variation av parametrar innebär att vi i den allmänna lösningen

$$\Phi(t)\bar{c}$$

till den homogena ekvationen ersätter den konstanta kolonnvektorn $\bar{c}$ med en ny kolonnvektor $\bar{u}(t)$ som är en okänd funktion,

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Ansats till partikulärlösning

$$\bar{x}_p = \Phi(t)\bar{u}(t) \qquad (4)$$

Vi vill alltså att

$$\bar{x}_p'(t) = A(t)\bar{x}_p(t) + \bar{F}(t). \qquad (5)$$

Derivering av (4) ger

$$\bar{x}_p'(t) = \Phi'(t)\bar{u}(t) + \Phi(t)\bar{u}'(t)$$

$$\underset{(3)}{=} A\Phi(t)\bar{u}(t) + \Phi(t)\bar{u}'(t). \qquad (6)$$

Insättning av (4) och (6) i (5) ger

$$A\Phi(t)\bar{u}(t) + \Phi(t)\bar{u}'(t) = A(t)\Phi(t)\bar{u}(t) + \bar{F}(t)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Phi(t)\bar{u}'(t) = \bar{F}(t) \qquad (7)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\bar{u}'(t) = \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t).$$

Vi kan nu integrera och få $\bar{u}(t)$

$$\bar{u}(t) = \int \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t)\,dt$$

Insatt i (4) ger detta

$$\underset{n\times 1}{\bar{x}_p(t)} = \underset{n\times n}{\Phi(t)} \int \underbrace{\underset{n\times n}{\Phi(t)^{-1}}\,\underset{n\times 1}{\bar{F}(t)}}_{n\times 1}\,dt$$

integrera varje komponent

Den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{F}(t)$$

ges alltså av

$$\bar{x} = \underbrace{\Phi(t)\bar{c}}_{\text{allmän lösning till den homogena ekv.}} + \underbrace{\Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t)\,dt}_{\text{partikulärlösning till den inhomogena ekv.}} \qquad (8)$$

om $\Phi(t)$ är en fundamentalmatris.

(8) ger alltså en explicit lösning förutsatt att vi kan bestämma en fundamentalmatris och utföra integrationen i (8).

Om $A(t) = A$ är konstant kan vi i princip bestämma fundamentalmatrisen.

<u>Kommentar:</u> Om $n=1$ är (8) den formel vi har härlett tidigare för att lösa en första ordningens linjär ODE. Ekvationen $y' = -h(t)y + g(t)$ har fundamentalmatris

$$\Phi(t) = e^{-H(t)} \quad (1\times 1\text{-matris}),$$

där $H'(t) = h(t)$.

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{t} \end{pmatrix}.$$

Vi använder variation av parametrar. Betrakta först den homogena ekvationen. Egenvärden:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)-8 = \lambda^2-9=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 3$$

Egenvektorer:

$\lambda=3$: $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k_1 = 4k_2$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ egenvekt.

$\lambda=-3$: $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k_1 = -2k_2$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ egenvekt.

$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$ och $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t}$ linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen.

Fundamentalmatris: $\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} = \Phi(t)$

$\det\Phi(t) = -6$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\bar{\Phi}(t)^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -e^{-3t} & -2e^{-3t} \\ -e^{3t} & 4e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{6}e^{3t} & -\frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{t} \end{pmatrix}$$

En partikulärlösning ges av

$$\bar{X}_p(t) = \Phi(t)\int \bar{\Phi}(t)^{-1}\bar{F}(t)\,dt$$

$$\Phi(t)^{-1}\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{6}e^{3t} & -\frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{t}{3}e^{-2t} \\ \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{2}{3}te^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\int \bar{\Phi}(t)^{-1}\bar{F}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int \frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{t}{3}e^{-2t}\,dt \\ \int \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{2}{3}te^{4t}\,dt \end{pmatrix}$$

$$\int \frac{1}{6}e^{-4t}\,dt = -\frac{1}{24}e^{-4t}, \quad \int \frac{1}{6}e^{2t}\,dt = \frac{1}{12}e^{2t}$$

$$\int \frac{t}{3}e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{6}te^{-2t} + \frac{1}{6}\int e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{6}te^{-2t} - \frac{1}{12}e^{-2t}$$

$$\int \frac{2}{3}te^{4t}\,dt = \frac{1}{6}te^{4t} - \frac{1}{6}\int e^{4t}\,dt = \frac{1}{6}te^{4t} - \frac{1}{24}e^{4t}$$

$$\int \Phi(t)^{-1}F(t)\,dt = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24}e^{-4t} - \frac{1}{6}te^{-2t} - \frac{1}{12}e^{-2t} \\ \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{6}te^{4t} + \frac{1}{24}e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_p(t) = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-4t} - 4te^{-2t} - 2e^{-2t} \\ 2e^{2t} - 4te^{4t} + e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -4e^{-t} - 16te^{t} - 8e^{t} + 4e^{-t} - 8te^{t} + 2e^{t} \\ -e^{-t} - 4te^{t} - 2e^{t} - 2e^{-t} + 4te^{t} - e^{t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -(24t+6)e^{t} \\ -3e^{t} - 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} (8t+2)e^{t} \\ e^{t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{X} = c_1\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} (8t+2)e^{t} \\ e^{t} + e^{-t} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Ex. forts. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\bar{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\bar{X} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{t} \end{pmatrix}, \quad \bar{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{X}_0$$

Insättning av $t=0$ i (8) ger

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \bar{x}(0) = c_1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

dvs. vi får ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/4\\1/4\end{pmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$$

och vi får lösningen

$$\bar{x} = \frac{7}{24}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}e^{3t} + \frac{1}{24}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{-3t} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix}(8t+2)e^{t}\\e^{t}+e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix}-(24t+6)e^{t} + 28e^{3t} + 2e^{-3t}\\ -3e^{t} - 3e^{-t} + e^{3t} - e^{-3t}\end{pmatrix}$$

Genom att utnyttja (8) kan vi skriva ner en formel för lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases}\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{F}(t)\\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0\end{cases} \qquad (10)$$

Som partikulärlösning kan vi välja en viss primitiv funktion i integrationen: (8), t.ex.

$$\bar{X}_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} \bar{F}(s)\,ds$$

så att partikulärlösningen satisfierar $\bar{X}_p(t_0) = 0$.
Vi får då

$$\bar{X} = \Phi(t)\bar{c} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} \bar{F}(s)\,ds$$

och begynnelsevillkoret ger

$$\bar{X}_0 = \bar{X}(t_0) = \Phi(t_0)\bar{c} \Rightarrow \bar{c} = \Phi(t_0)^{-1}\bar{X}_0$$

Lösningen till (10) ges alltså av

$$\bar{X}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\bar{X}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(s)^{-1}\bar{F}(s)\,ds. \quad (11)$$

$U(t,s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$ kallas ibland propagatorn.

Om vi har den homogena ekvationen $\bar{X}' = A\bar{X}$ med begynnelsevillkoret $\bar{X}(t_0) = \bar{X}_0$ så ges lösningen av

$$\bar{X}(t) = U(t,t_0)\bar{X}_0 = U(t,t_0)\bar{X}(t_0)$$

dvs. $U(t,t_0)$ "propagerar" lösningen från $\bar{X}(t_0)$ till $\bar{X}(t)$.

Ex. forts Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{t} \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{x}_0$$

genom att använda formeln (11).

Vi har ovan visat att vi kan ta

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}, \quad \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{-3t} & \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{6}e^{3t} & -\frac{2}{3}e^{3t} \end{pmatrix}$$

Som ovan får vi

$$\int_0^t \Phi(s)^{-1}\overline{F}(s)\,ds = \begin{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{6}e^{-4s} + \frac{s}{3}e^{-2s}\,ds \\ \int_0^t \frac{1}{6}e^{2s} - \frac{2}{3}se^{4s}\,ds \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[-\frac{1}{24}e^{-4s} - \frac{1}{6}se^{-2s} - \frac{1}{12}e^{-2s}\right]_0^t \\ \left[\frac{1}{12}e^{2s} - \frac{1}{6}se^{4s} + \frac{1}{24}e^{4s}\right]_0^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{24}e^{-4t} - \frac{1}{6}te^{-2t} - \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{6}te^{4t} + \frac{1}{24}e^{4t} - \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Vi får

$$\Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\bar{F}(s)ds = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}(8t+2)e^t \\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/8 \\ -1/8\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-(8t+2)e^t + 4e^{3t} - 2e^{-3t} \\ -e^t - e^{-t} + e^{3t} + e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\bar{x}_0 = \begin{pmatrix}4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4e^{3t} & 2e^{-3t} \\ e^{3t} & -e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\end{pmatrix}$$

Alltså ges lösningen av

$$\bar{x} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}-(24t+6)e^t + 12e^{3t} - 6e^{-3t} \\ -3e^t - 3e^{-t} + 3e^{3t} + 3e^{-3t}\end{pmatrix} + \frac{1}{24}\begin{pmatrix}16e^{3t} + 8e^{-3t} \\ 4e^{3t} - 4e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix}-(24t+6)e^t + 28e^{3t} + 2e^{-3t} \\ -3e^t - 3e^{-t} + e^{3t} - e^{-3t}\end{pmatrix}$$

vilhet förstås är samma som vi fick tidigare.

Vi har tidigare använt variation av parametrar på ekvationen

$$y'' + Py' + Qy = f. \qquad (12)$$

Denna ekvation kan som tidigare skrivas om som ett första ordningens linjärt system genom att vi inför $x_1 = y$ och $x_2 = y'$,

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -Qx_1 - Px_2 + f \end{cases},$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}}_{\bar{F}(t)}. \qquad (13)$$

Om $\{y_1, y_2\}$ är en fundamentalmängd till (9), så är

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$ en fundamentalmatris till (13).

Ekvationen (7) ovan

$$\Phi(t)\bar{u}'(t) = \bar{F}(t)$$

ger då

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f \end{cases}$$

dvs. samma som vi hade tidigare.