Föreläsning 8

SF1633 Differentialekvationer HT18. Kurt Johansson

Homogena linjära system med konstanta koefficienter

Betrakta ett homogent, linjärt första ordningens system

$$\bar{x}' = A\bar{x}, \tag{1}$$

där A är en konstant $n \times n$-matris; $\bar{x} = \bar{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Om

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

får vi

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

där c_1, c_2 är konstanter. Vi kan skriva detta som

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Vi prövar mer allmänt att hitta lösningar till (1) på formen

$$\bar{x} = \bar{k} e^{\lambda t} \tag{2}$$

där $\bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ är en konstant vektor och λ ett tal.

Insättning av (2) i (1) ger

$$\lambda \bar{k} e^{\lambda t} = A\bar{k} e^{\lambda t} \Leftrightarrow A\bar{k} = \lambda \bar{k}$$

λ ska alltså vara ett egenvärde till A och $\bar{k}$ motsvarande egenvektor.

λ är en lösning till karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Vi kan skilja på två fall

1) A har n olika egenvärden, reella eller komplexa

2) A har multipla egenvärden, dvs. karakteristiska ekvationen har multipelrötter.

Fallet 2) är svårare och vi ska inte behandla det fullständigt.

1) Antag att A har n olika egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Låt $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ vara tillhörande egenvektorer:

$$A\bar{k}_j = \lambda_j \bar{k}_j, \quad 1 \le j \le n.$$

Antag egenvärdena reella. (Vi vill ha reella lösningar.)
Då ger

$$\bar{x}_1 = \bar{k}_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \bar{x}_n = \bar{k}_n e^{\lambda_n t}$$

n st linjärt oberoende lösningsvektorer, en fundamentalmängd. ($\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ linjärt oberoende)

Den allmänna lösningen till $\bar{x}' = A\bar{x}$ ges av

$$\bar{x} = c_1 \bar{k}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \bar{k}_n e^{\lambda_n t},$$

dvs. vi har en fundamentalmatris

$$\Phi(t) = \left(\bar{k}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \bar{k}_2 e^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad \bar{k}_n e^{\lambda_n t} \right)$$

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \bar{x} \qquad (3)$$

Sök egenvärden

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ eller } 2.$$

Sök tillhörande egenvektorer $\bar{k}$, $(A - \lambda I)\bar{k} = 0$

1) $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 - k_2 = 0 \\ -2k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases},$$

vilket ger $k_1 = k_2$. $\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en egenvektor

2) $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k_2 = -2k_1.$$

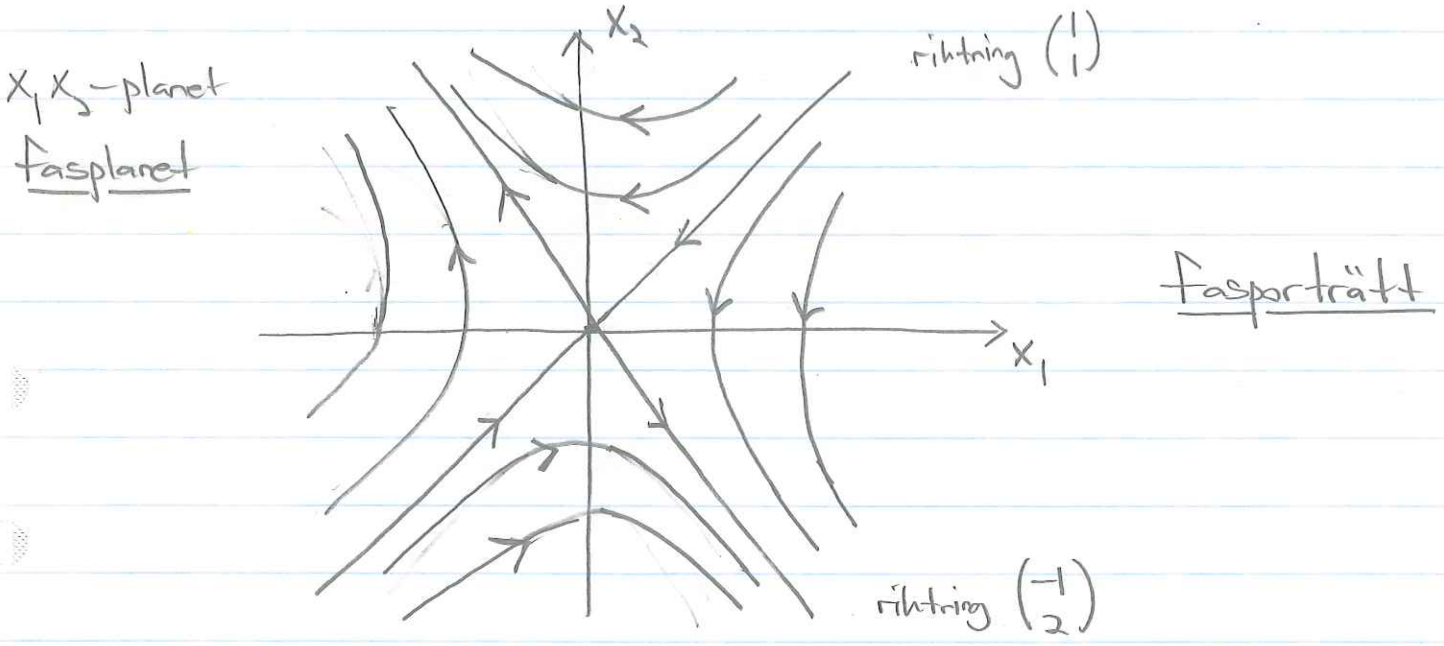
Välj $k_1 = -1$. $\bar{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en egenvektor.

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{-t} - c_2 e^{2t} \\ x_2 = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$

$\bar{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ger en kurva i x_1x_2-planet ofta kallad en <u>bana</u> eller <u>trajektoria</u> (tänka på $(x_1(t), x_2(t))$ som ett läge för en partikel vid tiden t)



Origo är en stationär punkt. (högerledet i ekvationen $= 0$)

$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$ tangentvektorn för banan i $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

Högerledet i (3) ger tangentvektorn i varje punkt.

Multipelt egenvärde

m = egenvärdets multiplicitet i karakteristiska ekvationen = algebraisk multiplicitet

geometrisk multiplicitet = egenrummets dimension

dvs. dimensionen av det rum som spänns upp av alla egenvektorer till λ.

Det gäller alltid

geometrisk multiplicitet $\leq$ algebraisk multiplicitet (4)

Om vi har strikt olikhet får vi inte direkt tillräckligt många linjärt oberoende lösningar.

Vi betraktar bara fallet $n=2$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A \text{ konstant } 2\times 2\text{-matris}$$

Antag att $\det(A-\lambda I)$ har en dubbelrot λ.

1) Till λ hör två linjärt oberoende egenvektorer $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ (likhet i (4)).

$$c_1 \bar{k}_1 e^{\lambda t} + c_2 \bar{k}_2 e^{\lambda t} \quad \text{allmän lösning}$$

2) Till λ hör bara en egenvektor (bortsett från multipler) dvs. strikt olikhet i (4). Lösningar finns på formen

$$\bar{x}_1 = \bar{k}e^{\lambda t}$$
$$\bar{x}_2 = \bar{k}te^{\lambda t} + \bar{p}e^{\lambda t} \qquad (5)$$

där

$$(A-\lambda I)\bar{k} = 0 \quad , \bar{k} \text{ egenvektor}$$
$$(A-\lambda I)\bar{p} = \bar{k} \, . \quad (*) \qquad (6)$$

Vi ser att, om (6) gäller är

$$\bar{x}_2' - A\bar{x}_2 = \bar{k}(e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}) + \bar{p}\lambda e^{\lambda t} - A\bar{k}te^{\lambda t} - A\bar{p}e^{\lambda t}$$
$$= (\bar{k} + \lambda\bar{p} - A\bar{p})e^{\lambda t} + \underbrace{(\lambda\bar{k} - A\bar{k})}te^{\lambda t}$$
$$= \underbrace{(\bar{k} - (A-\lambda I)\bar{p})}_{=0}e^{\lambda t} - \underbrace{(A-\lambda I)\bar{k}}_{=0}te^{\lambda t} = 0 \, .$$

<u>Ex. 1</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$, alla vektorer är egenvektorer med egenvärde 2. Vi kan välja

$$\bar{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \bar{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som en bas i egenrummet $(= \mathbb{R}^2)$. Vi får

(*) $(A-\lambda I)^2\bar{p} = 0$

$$\bar{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{2t} = \begin{pmatrix}c_1e^{2t}\\c_2e^{2t}\end{pmatrix},$$

vilket vi förstås också kunnat få direkt ur

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases}.$$

Ex. 2 Bestäm den allmänna lösningen till

$$\bar{x}' = \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 6\end{pmatrix}}_{A}\bar{x}$$

Egenvärden

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 4\\-1 & 6-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda)+4 = (\lambda-4)^2,$$

dvs. $\lambda = 4$ dubbelrot. Egenvektorer $\bar{k} = \begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$

$$(A-4I)\bar{k} = \begin{pmatrix}-2k_1+4k_2\\-k_1+2k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ ger } k_1 = 2k_2$$

Vi kan ta

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \text{ som egenvektor}$$

$(A-4I)\bar{p} = \bar{k}$ ger

$$\begin{cases} -2p_1 + 4p_2 = 2 \\ -p_1 + 2p_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow -p_1 + 2p_2 = 1$$

En lösning är $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{4t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{4t} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$\overline{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix} e^{4t}$$

<u>Komplexvärda lösningar</u>

Att $\overline{x}_1(t) + i\overline{x}_2(t)$, där $i^2 = -1$, är en lösning till

$$\overline{x}'(t) = A\overline{x}(t)$$

innebär att

$$\overline{x}_1'(t) + i\overline{x}_2'(t) = A(\overline{x}_1(t) + i\overline{x}_2(t)) = A\overline{x}_1(t) + iA\overline{x}_2(t)$$

och tar vi real- och imaginärdel ser vi att

$$\overline{x}_1'(t) = A\overline{x}_1(t) \quad , \quad \overline{x}_2'(t) = A\overline{x}_2(t)$$

Komplexa egenvärden

Ex. Bestäm den allmänna lösningen till

$$\begin{cases} x_1' = 6x_1 - x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm först egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0,$$

vilhet ger $\lambda = 4 \pm \sqrt{16-17} = 4 \pm i$.

Egenvektorer till $\lambda = 4+i$ ges av

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⌈ $(2+i)\cdot$ första raden = andra raden ⌋

$(2-i)k_1 - k_2 = 0$, $k_2 = (2-i)k_1$, $\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ en egenvektor

Vi får lösningen

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(4+i)t}$$

Real- och imaginärdelarna ger lösningar.

$$e^{(4+i)t} = e^{4t}(\cos t + i\sin t)$$

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ (2-i)(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{4t}}_{\bar{x}_1(t)} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} e^{4t}}_{\bar{x}_2(t)}$$

$\bar{x}_1(t)$ och $\bar{x}_2(t)$ ger två linjärt oberoende lösningar$^{(*)}$ ty Wronskianen ges av

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ 2\cos t + \sin t & -\cos t + 2\sin t \end{vmatrix} e^{8t} = -e^{8t} \neq 0.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$\bar{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Till det andra egenvärdet $4-i$ kan vi ta $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$ som egenvektor, vilket ger lösningen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} e^{(4-i)t} = \bar{x}_1(t) - i\bar{x}_2(t).$$

Real- och imaginärdelarna ger inget nytt.

(*) Detta gäller alltid vilket inte är så svårt att bevisa.