Föreläsning 6

SF1633 Differentialekvationer HT18. Kurt Johansson.

Reduktion av ordning

Detta är ett exempel på ett variabelbyte i en ODE. Antag att vi på något sätt har hittat en lösning y_1 till den homogena ekvationen

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (1)$$

Ett sätt att hitta en andra, linjärt oberoende lösning till (1) är då att göra variabelbytet $y(x) = u(x)y_1(x)$, där u är en ny okänd funktion.
Betrakta mer allmänt

$$y'' + Py' + Qy = R \qquad (2)$$

och antag att

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1' = 0. \qquad (3)$$

Om $y = uy_1$ är

$$y' = u'y_1 + uy_1', \quad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

enligt produktregeln för derivata. Insättning i (2) ger

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + P(u'y_1 + uy_1') + Quy_1 =$$

$$= u''y_1 + (2y_1' + Py_1)u' + \underbrace{(y_1'' + Py_1' + Qy_1)}_{=0 \text{ enligt } (3)}u = R$$

Sätt $v = u'$, så att $v' = u''$. Vi får då

$$y_1 v' + (2y_1' + Py_1)v = R, \tag{4}$$

som är en linjär första ordningens ekvation för v. När vi känner v, får vi u genom integration och sedan $y = uy_1$.

<u>Ex.</u> Ekvationen $y'' - 2ay' + a^2y = 0$, $a \in \mathbb{R}$, har karakteristiska ekvationen

$$r^2 - 2ar + a^2 = 0 \Leftrightarrow (r-a)^2 = 0 \Leftrightarrow r = a \text{ (dubbelrot)}$$

$y_1(x) = e^{ax}$ en lösning. Ansatsen $y(x) = u(x)e^{rx}$ ger

$$y' = u'e^{ax} + uae^{ax}, \quad y'' = u''e^{ax} + 2u'ae^{ax} + ua^2e^{ax}$$

och insättning ger

$$u''e^{ax} + 2u'ae^{ax} + ua^2e^{ax} - 2a(u'e^{ax} + uae^{ax}) + a^2ue^{ax}$$

$$= u''e^{ax} + 2u'ae^{ax} - 2au'e^{ax} + u\underbrace{(a^2 - 2a^2 + a^2)}_{=0}e^{ax} =$$

$$= u''e^{ax} = 0 \Leftrightarrow u'' = 0 \Leftrightarrow u = c_1x + c_2.$$

$y = (c_1x + c_2)e^{ax}$ ger en annan lösning.

Vi ser att $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ är en fundamentalmängd.

Inhomogena ekvationer

$$Ly = a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (5)$$

En speciell lösning till (5), $Y_p(x)$, kallas en partikulärlösning.

Sats. Låt Y_p vara en partikulärlösning till (5), och låt $\{y_1, \ldots, y_n\}$ vara en fundamentalmängd av lösningar till motsvarande homogena ekvation ((4) med $f=0$). Den allmänna lösningen till (5) ges då av

$$y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n + Y_p \quad , \quad c_i \in \mathbb{R} \text{ godtyckliga konstanter.}$$

Bevis: Skriv (5) som $Ly = f$. Om y löser (5) så gäller

$$L(y - Y_p) = Ly - LY_p = f - f = 0,$$

dvs. $y - Y_p$ är en lösning till den homogena ekvationen. Alltså ges $y - Y_p$ av

$$y - Y_p = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$$

för några konstanter $c_1, \ldots, c_n$. ∎

Strategi för att lösa (5):

- Finn en fundamentalmängd av lösningar till den homogena ekvationen,
- finn en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen.

Ex. $y'' + y = e^x$.

Vi ser lätt att $\frac{1}{2}e^x$ ger en partikulärlösning.

$y'' + y = 0$ har den allmänna lösningen $c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Alltså ges den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen av $y = \frac{1}{2}e^x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Variation av parametrar

Detta är en metod att hitta en partikulärlösning om vi känner en fundamentalmängd av lösningar till den homogena ekvationen.

Vi har tidigare sett att

$$y' + h(x)y = f(x) \quad , \qquad H'(x) = h(x),$$

har lösningen

$$y = \underbrace{e^{-H(x)}\int f(x)e^{H(x)}\,dx}_{\text{partikulärlösning } Y_p} + \underbrace{ce^{-H(x)}}_{\text{allmän lösning till den homogena ekvationen}}$$

$y_1 = e^{-H(x)}$ ger en fundamentalmängd av lösningar $(n=1)$

Vi kan skriva partikulärlösningen på formen

$$Y_p(x) = \Big(\underbrace{\int f(x)e^{H(x)}\,dx}_{u_1(x)}\Big)y_1(x) = u_1(x)y_1(x)$$

Betrakta nu en linjär andra ordningens ekvation på standardform

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (6)$$

Låt y_1, y_2 vara två linjärt oberoende lösningar till motsvarande homogena ekvation

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 .$$

Sök en partikulärlösning på formen

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Vi får

$$y' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$
$$= y_1' u_1 + y_2' u_2 + (y_1 u_1' + y_2 u_2')$$

<u>Antag</u> att vi också väljer u_1 och u_2 så att

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0. \tag{7}$$

Vi undviker då andraderivator av u_1, u_2 då vi beräknar y''.
Om (7) gäller får vi

$$y'' = y_1'' u_1 + y_1' u_1' + y_2'' u_2 + y_1' u_2'$$

Insättning i ekv. ger

$$f = y'' + Py' + Qy = (\underbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}_{=0})u_1 + (\underbrace{y_2'' + Py_2' + Qy_2}_{=0})u_2$$
$$+ y_1' u_1' + y_2' u_2',$$

alltså

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = f \tag{8}$$

(7) och (8) ger tillsammans ett ekvationssystem för u_1' och u_2':

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f \end{cases} \tag{9}$$

Detta ekvationssystem har determinanten

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0,$$

ty $\{y_1, y_2\}$ är en fundamentalmängd av lösningar till den homogena ekvationen. Alltså har ekvationssystemet (9) en entydig lösning u_1', u_2' ur vilken u_1, u_2 i princip kan bestämmas genom integration.

Explicit får vi

$$u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W}, \quad u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W}.$$

från Kramers regel (se linjär algebra).

Ex. Ekvationen

$$x^2y'' - 2y = x, \quad x \neq 0$$

har lösningar på formen $y = x^m$. Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$x^2 y'' - 2y = x, \quad x \neq 0.$$

Vi skriver ekvationen på standardform

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = \frac{1}{x}$$

Ansatsen $y = x^m$ i motsvarande homogena ekvation ger

$$m(m-1)x^{m-2} - 2x^{m-2} = 0$$

$$(m^2 - m - 2)x^{m-2} = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

eftersom $x \neq 0$. Vi får $m = -1$ eller $m = 2$.

$y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-1}$ linjärt oberoende lösningar,

Ansatsen $y = y_1 u_1 + y_2 u_2$ och metoden med variation av parametrar ger enligt ovan

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x^2 u_1' + \frac{1}{x} u_2' = 0 \\ 2x u_1' - \frac{1}{x^2} u_2' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Multiplicera den andra ekvationen med $x/2$,

$$\begin{cases} x^2 u_1' + \frac{1}{x} u_2' = 0 \\ x^2 u_1' - \frac{1}{2x} u_2' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Detta ger $u_1' = \frac{1}{3x^2}$, $u_2' = -\frac{1}{3}x$ dvs.

$$u_1 = -\frac{1}{3x} + d_1 \ , \quad u_2 = -\frac{x^2}{6} + d_2 .$$

Vi kan välja $d_1 = d_2 = 0$, vilket ger partikulärlösningen

$$Y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2 = x^2\left(-\frac{1}{3x}\right) + \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6}\right) = -\frac{x}{2} .$$

Den allmänna lösningen ges av

$$y = -\frac{x}{2} + c_1 x^2 + \frac{c_2}{x} \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$