Föreläsning 5

SF1633 Differentialekvationer HT18 . Kurt Johansson

Linjära ODE av ordning n

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara ett öppet intervall, $x_0 \in I$, $y = y(x)$ och betrakta begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), & x \in I \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases} \qquad (1)$$

där $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ är givna tal.

Sats (Existens och entydighet). Antag att $a_n(x), \dots, a_0(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga funktioner i I och att $a_n(x) \neq 0$, $x \in I$. Då har begynnelsevärdesproblemet (1) en entydig lösning i hela I.

Som vi ska se senare är (1) ett specialfall av linjära första ordningens system, och för dessa finns en existens- och entydighetssats av den typ vi redan diskuterat. Från denna följer resultatet i en omgivning av x_0. Det som är nytt i satsen ovan för linjära ODE, och för linjära system av ODE är att lösningen existerar i hela intervallet I, inte bara nära x_0.

Repetition

Betrakta den linjära andra ordningens ODE:n med konstanta koefficienter

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (a_2 \neq 0)$$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ konstanter. Vi gör ansatsen $y = e^{rx}$. Insättning ger

$$(a_2 r^2 + a_1 r + a_0) e^{rx} = 0.$$

Eftersom $e^{rx} \neq 0$ måste r satisfiera den karakteristiska ekvationen

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \qquad (2)$$

Detta ger tre fall

(i) (2) har två olika reella lösningar r_1, r_2, $r_1 \neq r_2$,

Allmän lösning: $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(ii) (2) har en reell dubbelrot r_1

Allmän lösning: $y(x) = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(iii) (2) har två icke-reella rötter $\alpha \pm i\beta$

Allmän lösning: $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Att dessa formler ger den allmänna lösningen följer av den teori vi ska behandla nedan, kan också visas direkt i detta fall.

Ex. $y'' + 4y = 0$ ger den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$$

Allmän lösning: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Operatorform för linjära ODE

Låt $D = \frac{d}{dx}$ beteckna deriveringsoperatorn,

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

(1) kan skrivas

$$\underbrace{\left(a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \dots + a_1(x) D + a_0(x)\right)}_{= L} y(x) = g(x)$$

dvs.

$$Ly = g.$$

L är en linjär operator på funktioner:

$$L(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = c_1 L(y_1(x)) + c_2 L(y_2(x)) \quad \text{(linjaritet)}$$

om c_1, c_2 är konstanter.

Homogena ekvationer

Om $g = 0$ har vi en homogen n:te ordningens ODE:

$$Ly = 0.$$

Om g ej är identiskt 0, $g(x) \neq 0$ för något x, har vi en inhomogen n:te ordningens ODE

Sats (Superpositionsprincipen för homogena ekvationer).

Om $y_1, \dots, y_n$ är lösningar till den homogena ekvationen

$$Ly = 0$$

så är $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, c_i konstanter, också en lösning.

Linjärkombinationer av lösningar ger nya lösningar till en homogen linjär ekvation.

Bevis: Antag att $Ly_1 = 0, \dots, Ly_n = 0$. Då är

$$Ly = L(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) = c_1 Ly_1 + \dots + c_n Ly_n = c_1 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 = 0.$$

∎

Def. Funktionerna $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ sägs vara <u>linjärt beroende</u> på <u>intervallet I</u> om det finns konstanter $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ej alla $= 0$ så att

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

för <u>alla</u> $x \in I$. Om de inte är linjärt beroende på I sägs de vara <u>linjärt oberoende på I</u>.

Ex. $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $\sin x$, $\cos x$ är linjärt beroende på $\mathbb{R}$.

Vi har att $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$

$$1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = 0, \quad \text{alla } x \in \mathbb{R}.$$

Def. Om $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ har derivator i x till och med ordning $n-1$ så kallas determinanten

$$W(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

för <u>Wronskianen</u> av funktionerna i punkten x.

<u>Sats</u> Om $f_1(x), \dots, f_n(x)$ är linjärt beroende på I så är $W(f_1(x), \dots, f_n(x)) = 0$ på I.

<u>Bevis:</u> Vi skriver beviset i fallet $n=3$. Det finns konstanter c_1, c_2, c_3 ej alla $=0$ så att

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0 \quad , \quad x \in I$$

Derivering ger

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + c_3 f_3'(x) = 0 \quad , \quad x \in I$$

$$c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + c_3 f_3''(x) = 0 \quad , \quad x \in I$$

För varje $x \in I$ har alltså ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad x \in I,$$

en icke-trivial lösning. Detta är möjligt bara om determinanten, dvs. $W(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = 0$ för alla $x \in I$. ∎

<u>Ex.</u> $\sin x$ och $\cos x$ är linjärt oberoende på $[0, 2\pi]$

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0.$$

Alltså kan de inte vara linjärt beroende, ty då skulle Wronskianen vara $=0$.

<u>Sats</u>. Låt $y_1, \dots, y_n$ vara lösningar till den homogena ODE:n

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad , \quad x \in I. \qquad (3)$$

Då är $y_1, \dots, y_n$ linjärt oberoende på I om och endast om $W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0$ för <u>alla</u> $x \in I$.

<u>Bevis</u>: 1) Om $W(y_1(x), \dots, y_n(x)) \neq 0$ för alla $x \in I$, så ger föregående sats att de är linjärt oberoende.

2) Antag att $y_1(x), \dots, y_n(x)$ är linjärt oberoende lösningar till (3) och att $W(y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) = 0$ för något $x_0 \in I$. Då finns $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, ej alla $= 0$, så att

$$c_1 y_1^{(k)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(k)}(x_0) = 0 \quad , \quad k = 0, \dots, n-1, \qquad (4)$$

ty enligt en sats från linjär algebra så har det linjära homogena ekvationssystemet (4) för $c_1, \dots, c_n$ en icke-trivial lösning eftersom dess determinant (Wronskianen) är $=0$. Med dessa $c_1, \dots, c_n$ definierar vi

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

Då är $y(x)$ en lösning till (3) p.g.a. linjariteten och $y(x)$ uppfyller begynnelsevillkoret $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Entydighetssatsen ger då att den enda möjligheten är att $y(x) = 0$ för alla $x \in I$. Detta strider mot att $y_1, \dots, y_n$ är linjärt oberoende. $\blacksquare$

Ex. $y'' + 4y = 0$, $x \in \mathbb{R}$ har lösningarna $\sin 2x$ och $\cos 2x$ som är linjärt oberoende. Alla lösningar kan skrivas som en linjärkombination av dessa två lösningar:

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

Mängden av alla lösningar bildar ett vektorrum, lösningsrummet, eftersom linjärkombinationer av lösningar också är lösningar. Funktionerna $\sin 2x, \cos 2x$ är en bas i detta lösningsrum, vi säger att de utgör en fundamentalmängd av lösningar.

Vi vill generalisera det vi såg i exemplet till allmänna linjära, homogena n:te ordningens ODE.

Def. Varje uppsättning $y_1, \ldots, y_n$ av linjärt oberoende lösningar till (3) kallas en fundamentalmängd av lösningar på I.

Sats Det finns en fundamentalmängd av lösningar till (3).

Bevis: Utelämnas. Bygger på existenssatsen.

Nästa sats säger att linjärkombinationer av funktioner i fundamentalmängden ger alla lösningar.

<u>Sats</u> Låt $y_1, \dots, y_n$ vara en fundamentalmängd av lösningar till (3). Den allmänna lösningen till (3) på I ges då av

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n,$$

där $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ är godtyckliga konstanter.

<u>Bevis:</u> Antag $n = 2$. Det allmänna fallet är analogt. Låt Y vara en lösning till

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{på } I, \tag{5}$$

och låt $\{y_1, y_2\}$ vara en fundamentalmängd. Vi vill visa att det finns konstanter c_1, c_2 så att

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x \in I \tag{6}$$

Derivering ger att då måste även

$$Y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x), \quad x \in I \tag{7}$$

gälla. Tag $x_0 \in I$. Enligt tidigare sats gäller då att Wronskianen

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Då finns entydiga konstanter c_1, c_2 så att

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0) \\ c_2 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0) \end{cases} \qquad (9)$$

eftersom detta ekvationssystem för c_1, c_2 har determinanten (8) som är $\neq 0$. Alltså gäller (6) och (7) i x_0. Vi vill visa att (6) gäller för <u>alla</u> $x \in I$.

Sätt

$$G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) - Y(x)$$

och låt $L = a_2 D^2 + a_1 D + a_0$. Då $\{y_1, y_2\}$ är en fundamentalmängd och Y en lösning är

$$Ly_1 = Ly_2 = LY = 0 \quad \text{på } I.$$

Alltså är

$$LG = L(c_1 y_1 + c_2 y_2 - Y) = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 - LY = 0.$$

Dessutom är

$$G(x_0) = G'(x_0) = 0 \quad \text{enligt (9)}.$$

G löser alltså begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} Ly = 0 & \text{på } I \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Detta problem har den entydiga lösningen $y = 0$, dvs. vi har att

$$G(x) = 0, \quad x \in I,$$

vilket ger att (6) gäller för alla $x \in I$. ∎

Ex. Visa att $\{x^3, x^4\}$ är en fundamentalmängd av lösningar till

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0 \quad ; \; I = (0, \infty) \qquad (*)$$

och ge den allmäna lösningen. Bestäm den lösning som uppfyller $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

Om $c_1 x^3 + c_2 x^4 = 0$ på $(0,\infty)$ så måste $c_1 = c_2 = 0$ ty ett polynom är identiskt noll på $(0,\infty)$ endast om alla koefficienter är 0. Alternativt ser vi att Wronskianen

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = 4x^6 - 3x^6 = x^6 \neq 0 \quad \text{om } x > 0.$$

Derivering visar att x^3 och x^4 löser $(*)$. Den allmäna lösningen ges alltså av

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^4$$

Vi får

$$y'(x) = 3c_1 x^2 + 4c_2 x^3$$

$y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ ger

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -3 \end{cases}$$

$y(x) = 4x^3 - 3x^4$ löser begynnelsevärdesproblemet.