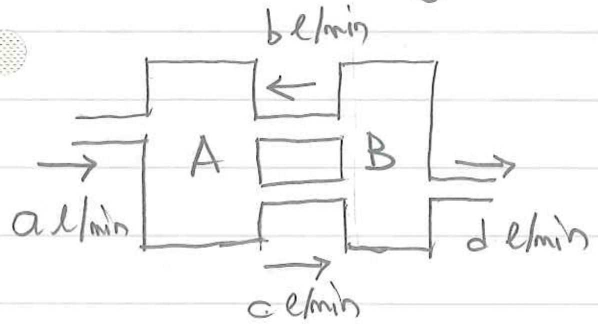
Föreläsning 4

SF1633 Differentialekvationer, HT18, Kurt Johansson

Modellering med system av ODE

Vi får naturligt system av ODE när vi har kopplade system i någon mening.

Ex. Blandningar, kopplade behållare



A, B blandare

$x_1(t)$ = mängden salt i A vid tiden t

$x_2(t)$ = mängden salt i B vid tiden t

$a+b=c$, $b+d=c$, $a=d$ (volym bevaras)

V_1 = volym av A, V_2 = volym av B

k = antal kg/l salt i inflödet till A

$$\frac{dx_1}{dt} = \underbrace{ak + b\underset{\substack{\uparrow\\ \text{konc. i B}}}{\frac{x_2}{V_2}}}_{\substack{\text{tillförd saltmängd}\\ \text{per minut}}} - \underbrace{c\underset{\substack{\uparrow\\ \text{konc. i A}}}{\frac{x_1}{V_1}}}_{\substack{\text{bortförd saltmängd}\\ \text{per minut}}}$$

Behållare A

$$\frac{dx_2}{dt} = \underbrace{c\frac{x_1}{V_1}}_{\text{tillförd salt-mängd per min}} - \underbrace{\left(b\frac{x_2}{V_2} + d\frac{x_2}{V_2}\right)}_{\text{bortförd salt-mängd per min}}$$

<u>Behållare B</u>

Vi får ett system av ODE

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{c}{V_1}x_1 + \dfrac{b}{V_2}x_2 + ak \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{c}{V_1}x_1 - \dfrac{c}{V_2}x_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Det är behändigt att skriva (1) med hjälp av matriser

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{c}{V_1} & \frac{b}{V_2} \\ \frac{c}{V_1} & -\frac{c}{V_2} \end{pmatrix}$$

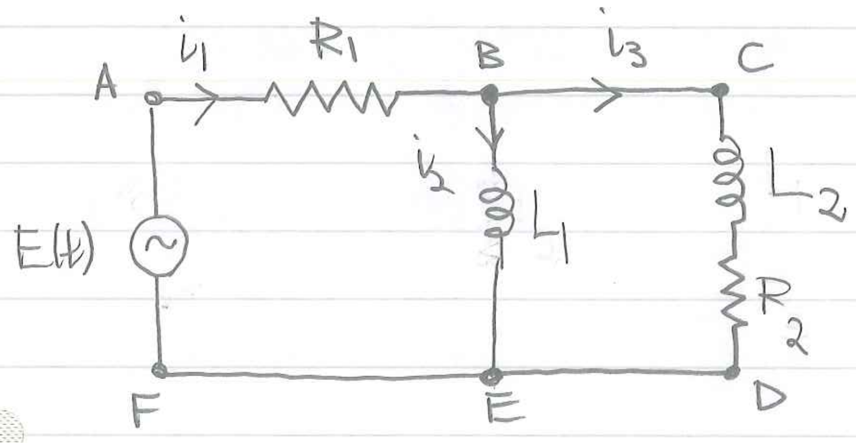
$$\bar{F} = \begin{pmatrix} ak \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) kan då skrivas

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{F}$$

Vi har ett linjärt, första ordningens system av ODE.

Ex. Elektriskt nätverk



Vi får följande system av ODE för i_1, i_2
(se nästa sida, ej del av kursen)

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} = -\left(\dfrac{R_1}{L_1} + \dfrac{R_1+R_2}{L_2}\right) i_1 + \dfrac{R_2}{L_2} i_2 + \left(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}\right) E \\[2ex] \dfrac{di_2}{dt} = -\dfrac{R_1}{L_1} i_1 + \dfrac{E}{L_1} \end{cases}$$

eller i matrisform

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}}_{\bar{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_1+R_2}{L_2}\right) & \frac{R_2}{L_2} \\ -\frac{R}{L_1} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}}_{\bar{I}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) E \\ \frac{E}{L_1} \end{pmatrix}}_{\bar{F}}$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = A\bar{I} + \bar{F}$$

Linjärt, första ordningens system av ODE.

Kirchoffs första lag:

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad (2)$$

Kirchoffs andra lag. Kretsen ABEFA:

$$E - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \qquad (3)$$

Kretsen BCDEB:

$$-L_2 \frac{di_3}{dt} - R_2 i_3 + L_1 \frac{di_2}{dt} = 0. \qquad (4)$$

Utnyttjar vi (2) i (4) får vi

$$-L_2 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} - R_2 (i_1 - i_2) + L_1 \frac{di_2}{dt} = 0 \qquad (5)$$

(3) och (5) ger

$$\frac{di_1}{dt} = \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right) \frac{di_2}{dt} - \frac{R_2}{L_2} i_1 + \frac{R_2}{L_2} i_2$$

$$= \left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right)\left(-\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{E}{L_1}\right) - \frac{R_2}{L_2} i_1 + \frac{R_2}{L_2} i_2$$

$$= -\left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_1 + R_2}{L_2}\right) i_1 + \frac{R_2}{L_2} i_2 + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) E$$

där vi utnyttjat att (3) ger

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{E}{L_1}.$$

Ex. Rov-Bytesdjursmodell

(Predator-Prey model). Populationsdynamik.

$x(t)$ = antalet rävar vid tiden t

$y(t)$ = " kaniner "

$$\frac{dx}{dt} = -Ax + Bxy \qquad A,B>0$$

$-Ax$: rävar utan mat dör ut exponentiellt

Bxy: tillväxten är proportionell mot antalet rävar och antalet kaniner

$$\frac{dy}{dt} = Dy - Cxy \qquad D,C>0$$

Dy: kaniner utan fiender tillväxer proportionellt mot antalet kaniner

$-Cxy$: kaninantalet avtar proportionellt mot antalet kaniner och antalet rävar

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -Ax + Bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = Dy - Cxy \end{cases}$$

Lotka-Volterras ekvation

Har lösningar som är periodiskt varierande.

Icke-linjärt första ordningens system ty vi har produkten xy av de två beroende variablerna.

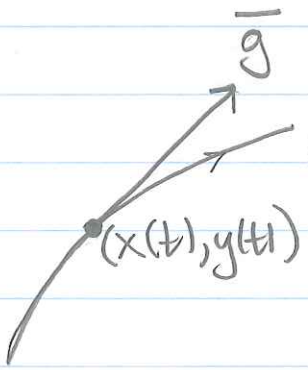
$t \to (x(t), y(t))$ lösningskurva

$$\bar{g}(x,y) = (-Ax + Bxy,\ Dy - Cxy)$$

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = \bar{g}(x,y)$$

hastighet i punkten $(x(t),y(t))$ (tangentvektor)

vektorfält



Vi söker en lösningskurva som går genom en viss punkt $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, begynnelsevillkor, och vars hastighetsvektor i varje punkt ges av vektorfältet $\bar{g}(x,y)$.

Antag att lösningskurvan till Lotka-Volterras ekvation ges av en funktionskurva $y(x)$ nära en viss punkt. Då gäller

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Dy - Cxy}{-Ax + Bxy} = \frac{y(D-Cx)}{x(Bx-A)}$$

↑
riktningskoefficient

Separabel ekvation $\qquad x, y > 0$

$$\frac{By - A}{y}\, dy = \frac{D - Cx}{x}\, dx$$

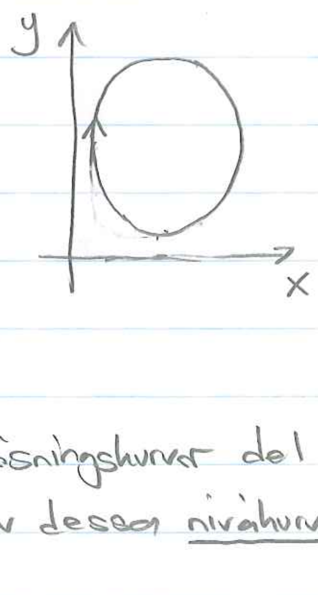
$$\int \left(B - \frac{A}{y}\right) dy = \int \left(\frac{D}{x} - C\right) dx + c_1 \quad \text{konstant}$$

$$By - A\ln y = D\ln x - Cx + c_1$$

Exponentiering ger

$$e^{By - A\ln y} = e^{D\ln x - Cx + c_1}$$

$$\frac{1}{y^A} e^{By} = e^{c_1} x^D e^{-Cx}$$



$$\left(x^D e^{-Cx}\right)\left(y^A e^{-By}\right) = \text{konstant}$$

Lösningskurvor del av dessa nivåkurvor

Ex. Testa att plotta nivåkurvor till

$f(x,y) = xy e^{-(x+y)}$; ger slutna kurvor i första kvadranten

Ex. Kemisk reaktionskinetik

$$A + 2B \rightleftarrows C$$ (reversibel reaktion)

$a = [A]$, $b = [B]$, $c = [C]$ koncentrationer som funktioner av tiden

reaktionstakt ($\longrightarrow$):

$$a' = \frac{1}{2} b'$$ (tidsderivator)

reaktionstakt ($\longleftarrow$): c'

Massverkans lag: reaktionstakten är proportionell mot produkten av reaktanternas koncentrationer

($\longrightarrow$): $[A][B]^2$

det behövs 2 B-molekyler

($\longleftarrow$): $[C]$

$$\begin{cases} a' = -k_1 a b^2 + k_2 c \\ b' = -2k_1 a b^2 + 2k_2 c \\ c' = k_1 a b^2 - k_2 c \end{cases}$$

k_1, k_2 konstanter

Icke-linjärt system av ODE.

Ex. Sol–jord–månesystemet

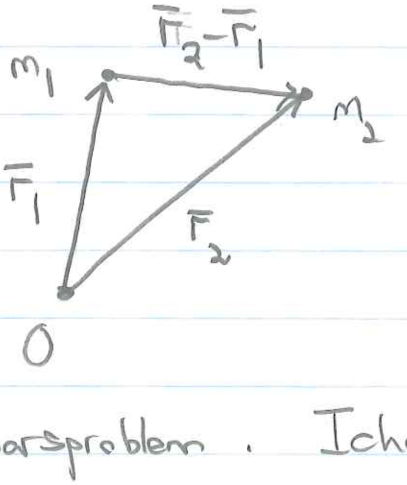
$\bar{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ solens läge, massa m_1

$\bar{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ jordens läge, massa m_2

$\bar{r}_3(t) = (x_3(t), y_3(t), z_3(t))$ månens läge, massa m_3

Newtons andra lag och gravitationslagen ger

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\bar{r}_1(t)}{dt^2} = \dfrac{Gm_1m_2(\bar{r}_2-\bar{r}_1)}{\|\bar{r}_2-\bar{r}_1\|^3} + \dfrac{Gm_1m_3(\bar{r}_3-\bar{r}_1)}{\|\bar{r}_3-\bar{r}_1\|^3} \\[2ex] m_2 \dfrac{d^2\bar{r}_2(t)}{dt^2} = \dfrac{Gm_2m_1(\bar{r}_1-\bar{r}_2)}{\|\bar{r}_1-\bar{r}_2\|^3} + \dfrac{Gm_2m_3(\bar{r}_3-\bar{r}_2)}{\|\bar{r}_3-\bar{r}_2\|^3} \\[2ex] m_3 \dfrac{d^2\bar{r}_3(t)}{dt^2} = \dfrac{Gm_3m_1(\bar{r}_1-\bar{r}_3)}{\|\bar{r}_1-\bar{r}_3\|^3} + \dfrac{Gm_3m_2(\bar{r}_2-\bar{r}_3)}{\|\bar{r}_2-\bar{r}_3\|^3} \end{cases}$$



G = gravitationskonstanten

Trekropparsproblem. Icke-linjär ODE i 9 variabler.