Föreläsning 20

SF1633 Differentialekvationer HT 18. Kurt Johansson

Blandade tentamensproblem

Ex. Differentialekvationen

$$x'' - (x-3)x' + x^2 - 4 = 0,$$

där $x = x(t)$, kan omformas till ett system av första ordningen. Klassificera de kritiska punkterna till detta system med avseende på stabilitet och typ.

Lösning: Sätt $y = x'$. Vi får då systemet

$$\begin{cases} x' = y & = P(x,y) \\ y' = (x-3)y - x^2 + 4 & = Q(x,y), \end{cases}$$

ty $y' = x'' = (x-3)x' - x^2 + 4 = (x-3)y - x^2 + 4$.

Högerledet är noll då $y = 0$ och $(x-3)y - x^2 + 4 = 0$, vilket ger

$$y = 0 \text{ och } x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ och } x = \pm 2.$$

De kritiska punkterna är $(-2, 0)$ och $(2, 0)$.

Vi linjariserar systemet kring de kritiska punkterna. Om (x_0, y_0) är den kritiska punkten ges det linjariserade

Systemets matris av

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y-2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = x-3$$

I $(-2,0)$ får vi

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ vars egenvärden ges av $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

dvs. $\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$. Vi får ett positivt och ett negativt egenvärde. Instabil sadelpunkt.

I $(2,0)$ får vi

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ vars egenvärden är $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Då realdelen < 0 får vi en stabil spiralpunkt.

Svar: $(-2,0)$ instabil sadelpunkt

$(2,0)$ stabil spiralpunkt

Ex. Funktionerna $y_1 = 1+x$, $y_2 = 1+2x$, $y_3 = 1+3x^2$

är lösningar till den linjära ekvationen

$$y'' + py' + qy = g \quad , \; x \in (0,\infty)$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y'' + py' + qy = 0, \quad x \in (0,\infty).$$

b) Lös den inhomogena ekvationen med begynnelse-villkoren $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.

Lösning: Vi har differentialoperatorn

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q$$

och det gäller att $Ly_1 = Ly_2 = Ly_3 = g$.
Sätt $f_1(x) = y_2(x) - y_1(x)$ och $f_2(x) = y_3(x) - y_1(x)$.
Då är

$$Lf_1 = Ly_2 - Ly_1 = g - g = 0$$
$$Lf_2 = Ly_3 - Ly_1 = g - g = 0,$$

så f_1 och f_2 löser den homogena ekvationen.
Vi vill visa att $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = 3x^2 - x$ är linjärt oberoende.

Wronskianen

$$W(f_1,f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3x^2-x \\ 1 & 6x-1 \end{vmatrix} = 3x^2 \neq 0$$

då $x \in (0,\infty)$. Alltså är $\{f_1,f_2\}$ en fundamentalmängd och den allmänna lösningen ges av

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 x + c_2(3x^2-x).$$

b) $y_1(x) = 1+x$ är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen ges då av

$$y = 1+x+c_1x+c_2(3x^2-x).$$

Villkoret ger

$$y' = 1+c_1+c_2(6x-1)$$

$$\begin{cases} y(1) = 2+c_1+2c_2 = 2 \\ y'(1) = 1+c_1+5c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+2c_2 = 0 \\ c_1+5c_2 = -2 \end{cases}$$

villkoret ger $c_1 = \frac{4}{3}$, $c_2 = -\frac{2}{3}$

$$y = 1+x+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}(3x^2-x) = 1+3x-2x^2.$$

<u>Svar:</u> $y = 1+3x-2x^2$.

Ex. Bestäm en styckvis deriverbar, kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 2.$$

Lösning: En första ordningens linjär ekvation kan lösas genom att multiplicera med en integrerande faktor:

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}.$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} y\right) = \begin{cases} x e^{x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$e^{x^2} y = \begin{cases} \int x e^{x^2} dx + c_1, & 0 \le x < 1 \\ c_2, & x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x^2} + c_1, & 0 \le x < 1 \\ c_2, & x \ge 1 \end{cases}$$

Alltså

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} + c_1 e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ c_2 e^{-x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

$y(0) = \frac{1}{2} + c_1 = 2 \Leftrightarrow c_1 = \frac{3}{2}$. Den lösning vi söker ska vara kontinuerlig. Alltså skall vänster- och högergränsvärdena i $x = 1$ vara lika vilket ger

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-1} = c_2 e^{-1} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} e + \frac{3}{2}.$$

Svar: $$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ \left(\frac{1}{2} e + \frac{3}{2}\right) e^{-x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

Ex. Undersök ekvationen

$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^3}, \quad x>0$$

a) Lös ekvationen med begynnelsevillkoret $y(1)=2$.

b) För lösningen i a), bestäm det största intervall där den är definierad.

c) Bestäm sådana begynnelsevärden y_0 att det finns en lösning med begynnelsevillkor $y(1)=y_0$ definierad på intervallet $1 \le x < \infty$.

Lösning: a) Division med y^2 ger

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{x}\frac{1}{y} + \frac{1}{x^3}$$

Sätt $u = 1/y$ så att $u' = -\frac{y'}{y^2}$. Detta ger

$$-u' = \frac{2}{x}u + \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow u' + \frac{2}{x}u = -\frac{1}{x^3}$$

Integrerande faktor $e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$, vilket ger

$$\frac{d}{dx}(x^2 u) = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 u = -\ln x + C$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{C-\ln x}{x^2} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{C-\ln x}, \quad x>0.$$

Begynnelsevillkoret $y(1)=2$ ger

$y(1) = \frac{1}{C} = 2 \Rightarrow \quad C = 1/2.$

Svar: $\quad y = \frac{x^2}{1/2 - \ln x}$

b) Lösningen existerar då $1/2 - \ln x \neq 0$, dvs. $x \neq \sqrt{e}$.
Det största intervall som innehåller $x_0 = 1$ är därför
$0 < x < \sqrt{e}$.

Svar: $\quad (0, \sqrt{e})$

c) Om $y(1) = y_0$ ger a) att

$$y(1) = \frac{1}{C} = y_0 \Leftrightarrow C = 1/y_0,$$

vilket ger lösningen

$$y(x) = \frac{x^2}{1/y_0 - \ln x}.$$

i) Om $y_0 > 0$ så blir största lösningsintervall
$(0, e^{1/y_0})$ som i b).

ii) Om $y_0 \to 0$ gäller $C \to \infty$, vilket ger $y(x) \to 0$.
Vi ser att $y(x) = 0$ är en lösning för alla x.

iii) Om $y_0 < 0$ är $1/y_0 - \ln x < 0$ för alla $x \geq 1$, så

lösningen är definierad på $[1, \infty)$.

Svar: $\quad y_0 \leq 0.$

Ex. Funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ är definierade för $t \geq 0$ och satisfierar ekvationerna

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t y(u) e^{2(t-u)} \, du \\ y(t) = -2 \int_0^t x(u) e^{u-t} \, du + e^{2t}. \end{cases}$$

Bestäm funktionerna $x(t)$ och $y(t)$.

Lösning: Vi noterar att integralerna i högra ledet är faltningar,

$$\int_0^t y(u) e^{2(t-u)} \, du = e^{2t} * y(t)$$

$$\int_0^t x(u) e^{u-t} \, du = \int_0^t x(u) e^{-(t-u)} \, du = e^{-t} * x(t),$$

Detta gör det naturligt att använda Laplacetransformer. Låt $X(s)$, $Y(s)$ beteckna Laplacetransformen av $x(t)$ resp. $y(t)$. Vi vet att (tabell)

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}.$$

Ekvationerna kan alltså skrivas

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} * y(t) \\ y(t) = -2e^{-t} * x(t) + e^{2t} \end{cases}$$

och Laplacetransformering ger

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{Y(s)}{s-2} \\ Y(s) = -\dfrac{2X(s)}{s+1} + \dfrac{1}{s-2} \end{cases} \quad (*)$$

där vi utnyttjat att $\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}$.
Från $(*)$ får vi

$$Y(s) = -\frac{2}{(s+1)(s-2)} Y(s) + \frac{1}{s-2}$$

vilket ger $Y(s) = \dfrac{s+1}{s(s-1)}$ och $X(s) = \dfrac{s+1}{s(s-1)(s-2)}$

Partialbråksuppdelning ger

$$X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - 2\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-2}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + 2\frac{1}{s-1}.$$

Invers Laplacetransformering ger nu

$$x(t) = \frac{1}{2} - 2e^{t} + \frac{3}{2}e^{2t}$$

$$y(t) = -1 + 2e^{t}$$

Svar: $x(t) = \frac{1}{2} - 2e^{t} + \frac{3}{2}e^{2t}$, $y(t) = 2e^{t} - 1$.

Ex. Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad , \quad x \in (a,b),$$

där p och q är två kontinuerliga funktioner. Låt $W(x)$ vara Wronskianen av y_1 och y_2 och låt $x_0 \in (a,b)$. Visa att

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \quad , x \in (a,b). \quad (\underline{\text{Abels formel}})$$

Lösning: Vi vet att

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \, , \, y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \, . \qquad (1)$$

Vi ser att formeln ger den entydiga lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0 & , \, x \in (a,b) \\ u(x_0) = W(x_0), \end{cases} \qquad (2)$$

ty en integrerande faktor ges av

$$e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt},$$

eftersom $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$ är en primitiv funktion till $p(x)$. Vi får

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} u \right) = 0 \Rightarrow u = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

Vi får

$$u(x_0) = c e^{-\int_{x_0}^{x_0} p(t)dt} = c,$$

vilket ger $c = u(x_0) = W(x_0)$. Vi vill visa att W satisfierar ekvationen i (2).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

(1) ger $y_1'' = -py_1' - qy_1$, $y_2'' = -py_2' - qy_2$, varför

$$W' = y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1)$$
$$= p(y_2 y_1' - y_1 y_2') - qy_1y_2 + qy_2y_2 = -pW.$$