Föreläsning 1

SF1633 Differentialekvationer HT18. Kurt Johansson

Vad är en differentialekvation?

En differentialekvation är en en ekvation som ger ett samband mellan en eller flera okända funktioner och deras derivator tagna i samma punkt.

Ex. Enklaste exemplet är

$$y'(x) = f(x) \qquad (1)$$

där $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, är en okänd funktion och $f(x)$ är en känd funktion, t.ex. $f(x) = \cos x$. (1) kan lösas explicit med integration

$$y(x) = \int f(x)\,dx + \overset{\text{okänd konstant}}{C}.$$

Om $f(x) = \cos x$ får vi

$$y(x) = \int \cos x\,dx + C = \sin x + C.$$

Ex. En grundläggande differentialekvation är

$$y'(t) = ky(t) \quad , t \in \mathbb{R}$$

eller bara $y' = ky$, där k är en given reell konstant.

Om $y(t) \neq 0$ är

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\ln|y(t)| = k \Rightarrow \ln|y(t)| = kt + c_1,$$

där c_1 är en konstant. Alltså

$$|y(t)| = e^{c_1+kt} \Rightarrow y(t) = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{=C\text{, ny konstant}} \cdot e^{kt}$$

Vi ska se senare att

$$y(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R} \text{. godtycklig konstant}$$

ger alla lösningar. Detta är den allmänna lösningen
Explicit lösning.

Ordinära differentialekvationer (ODE)
Okänd(a) funktion(er) av en variabel

Ex. $y'' + x^2 y' + y^2 = 0$, $y = y(x)$ okänd

Ex. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 \end{cases}$ $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ två okända funktioner

System av ODE.

<u>Ordning:</u> ordningen av den högsta derivatan i ekvationen

En ODE av ordning n har formen:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (2)$$

för x i något intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. $F(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ är en given funktion av $n+2$ variabler.

$$F(x, y, y', y'') = y'' + x^2 y' + y^2 \quad \text{ger ekv. ovan}$$

Om F är en linjär funktion av $y, y', \dots, y^{(n)}$ har vi en <u>linjär ODE</u>:

$$a_n(x) y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) - g(x) = 0$$

<u>Ex.</u> $y'' + 3y' + x = 0$ är linjär

$y'' + x^2 y' + y^2 = 0$ är icke-linjär (3)

$\uparrow$ inte en linjär funktion av y.

<u>Standardform:</u>

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Ekvationerna i (3) är på standardform.

$xy'' + y = 0$, ej standardform.

Vad menas med en lösning?

En funktion $y = \varphi(x)$ är en <u>lösning</u> till (2) på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ om

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{för alla } x \in I,$$

dvs. φ satisfierar ekvationen på intervallet I.

<u>Ex.</u> Funktionen $y = \varphi(x) = \frac{1}{x-1}$ är en lösning till

$$y' + y^2 = 0$$

på intervallen $(-\infty, 1)$ och $(1, \infty)$, ty

$$\varphi'(x) + \varphi(x)^2 = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = 0.$$

Ibland kan vi ge lösningar i <u>implicit form</u>.

<u>Ex.</u> $y' + y'\cos y = 1$

kan skrivas $\frac{d}{dx}(y + \sin y) = 1$,

enligt kedjeregeln, vilket ger att $y = y(x)$ satisfierar

$$y + \sin y = x + C$$

där c är en konstant. Grafen $y = y(x)$ är alltså en del av nivåkurvan

$$y + \sin y - x = C \qquad (4)$$

Här kan vi inte lösa ut y som funktion av x på något enkelt sätt. Vi säger att (4) ger lösningen i implicit form (jfr. implicit definierade funktioner i flervariabelkursen).

För ekvationen (2) får vi i allmänhet n okända parametrar (konstanter) i lösningen, dvs. lika många som ekvationens ordning. Olika val av konstanterna ger olika lösningar. Det är inte säkert att vi får alla lösningar på detta sätt

Ex. Betrakta ekvationen

$$y' + 2xy^2 = 0. \qquad (5)$$

Den har lösningar

$$y = \frac{1}{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R},$$

där c är en godtycklig konstant, dvs. för varje val av $C \in \mathbb{R}$ får vi en lösning (i alla fall på något intervall.)

$$\left[\; -\frac{y'}{y^2} = 2x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) = 2x \quad \underline{\text{om}} \quad y \neq 0\right.$$

vilhet ger

$$\left.\frac{1}{y} = x^2 + C \Rightarrow y = \frac{1}{x^2+C}, \;\right]$$

(6) är inte den allmänna lösningen. Vi har också lösningen $y=0$ (dvs. $y(x)=0$ för alla x). Lösningen $y=0$ kallas en <u>singulär lösning</u>.

<u>Begynnelsevärdesproblem</u>

Hur fixerar vi en bestämd lösning till en ODE?

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = y_1, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases} \qquad (7)$$

där $y_0, \ldots, y_{n-1}$ är givna tal och t_0 är en given punkt på $\mathbb{R}$ kallas ett <u>begynnelsevärdesproblem</u>.

(Tänk på t som en tidsvariabel; vi ger villkor på y och dess derivator vid tiden t_0.

Om den oberoende variabeln betecknas t eller x är oväsentligt. Även om den inte har tolkningen av en tidsvariabel talar vi om ett begynnelsevärdesproblem.

Ex. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$y = \dfrac{1}{x^2+c}$ ger lösningar för alla $c \in \mathbb{R}$.

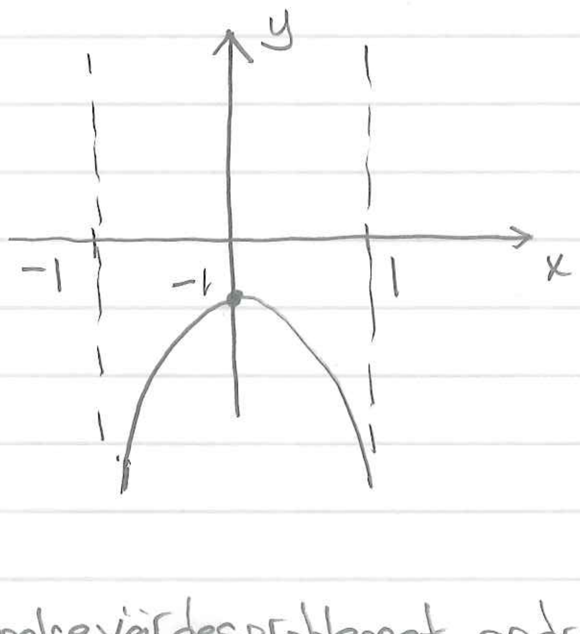
Begynnelsevillkoret $y(0) = -1$ ger

$$y(0) = \frac{1}{0^2+c} = \frac{1}{c} = -1, \text{ dvs. } c = -1$$

Vi får

$$y(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad \text{för} \quad -1 < x < 1 \quad (\text{existensintervall})$$

lösningen $\to -\infty$ då $x \to \pm 1$



Har begynnelsevärdesproblemet andra lösningar?

Sats (Existens och entydighet).

Låt U vara en öppen omgivning av (x_0, y_0) och antag att $f(x,y)$ och

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ är kontinuerliga i U.

Då finns ett intervall (x_0-h, x_0+h), $h>0$, så att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

har en entydig lösning i (x_0-h, x_0+h).

Beviset av satsen tillhör en mer avancerad kurs i ODE.

Idé: definiera en lösning iterativt (Picarditeration)

$y_0(x) = y_0$ ansats

$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt$ löser $y_1'(x) = f(x, y_0(x))$

$\vdots$

$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))\,dt$ löser $y_k'(x) = f(x, y_{k-1}(x))$

$\vdots$

Visa att $y_k(x) \to y(x)$ då $k \to \infty$ och att $y(x)$ satisfierar ekvationen.

Ex. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = |y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Vi ska senare se att detta är en separabel ekvation och detta ger lösningen

$$y = \frac{x^2}{4},$$

vilket lätt verifieras, $y' = \frac{x}{2} = \left(\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}$.

Vi ser att den konstanta lösningen $y = y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, också löser ekvationen och begynnelsevillkoret.

Begynnelsevärdesproblemet (8) har alltså ingen entydig lösning. I detta fall är

$$y' = f(x,y) = |y|^{1/2}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2y^{1/2}} \quad \text{om } y > 0,$$

som inte är kontinuerlig i origo, $(0,0)$. Villkoret i satsen är alltså inte uppfyllt.

Vi är också intresserade av differential-ekvationer för funktioner av flera variabler.

Ex. $u = u(x,y)$ satisfierar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{för } (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

Detta är ett exempel på en partiell differential ekvation (PDE).

PDE är av central betydelse i många modelerings-sammanhang och för att beskriva grundläggande fysikaliska fenomen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{vågekvationen}$$

$u = u(x,y,z,t)$.

Exempel på ODE i tillämpningar

Tillväxtmodeller

Till exempel i populationsdynamik

$P(t)$ = populationens storlek vid tiden t
(kontinuerlig variabel)

t.ex antal invånare i en stad, antalet djur av en viss art i ett område, antalet bakterier i en bakteriekultur, eller kapital vid tiden t, antal radioaktiva kärnor.

$\frac{dP}{dt}$ = hastigheten (takten) i populationsförändringen
(rate)

Modellantagande:

proportionell mot — "birth rate"

Antal födslar per tidsenhet $\propto$ aktuella populationen bP

Antalet dödsfall per tidsenhet $\propto$ —"— mP

"mortality rate"

$$\frac{dP}{dt} = bP - mP = kP \quad , \quad k = b - m$$

$k > 0$ tillväxt, $k < 0$ avtagande

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$ har lösningen $P(t) = P_0 e^{kt}$

Radioaktivt sönderfall

$A(t)$ = antalet radioaktiva kärnor i en bit material

$$\frac{dA}{dt} = -cA \quad , \quad c>0 \qquad \text{(avtagande)}$$

$$A(t) = A_0 e^{-ct} \quad , \quad t_{1/2} \text{ halveringstid}$$

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-ct_{1/2}} \quad , \quad e^{-ct_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$-ct_{1/2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \quad , \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{c} .$$

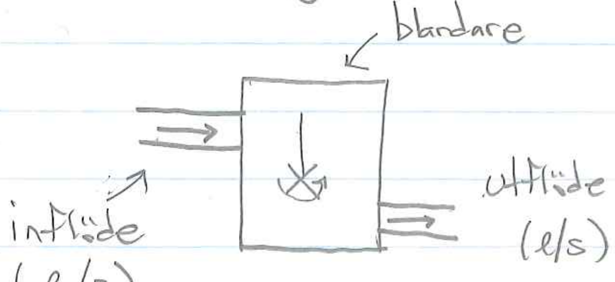
c specificeras ofta som en halveringstid.

Logistiska ekvationen

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{D}\right) \quad , \quad D>0$$

tillväxttakten avtar då populationen ökar

Blandningar



$A(t)$ = mängden salt i behållaren

Inflödet innehåller

a kg/l salt

(koncentration i inflöde)

Inflödet = b l/s = Utflödet

V = behållarens volym

koncentration i behållaren

$$\frac{dA}{dt} = ab - \frac{A}{V}b$$

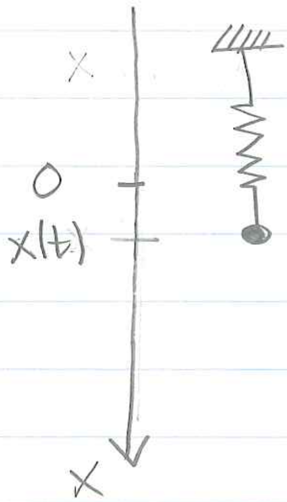
inflödestakt   utflödestakt

$$\frac{dA}{dt} = ab - \frac{b}{V}A.$$

Ex. <u>Dämpad svängning</u>

x = läge vid tiden t, m = massa

Newtons andra lag: $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$ kraft



0 = jämviktsläge

Fjäderkraft $= -kx(t)$ (Hookes lag)

Friktion $= -\gamma \frac{dx}{dt}$

$k, \gamma > 0$ konstanter

Drivande kraft $= f(t)$

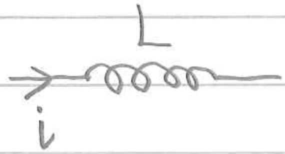
Newtons andra lag ger

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - kx(t) + f(t)$$

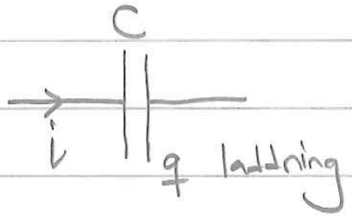
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}f(t) \qquad (8)$$

Elektrisk krets

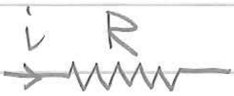
spänningsfall

Spole 

$L\frac{di}{dt}$ L induktans

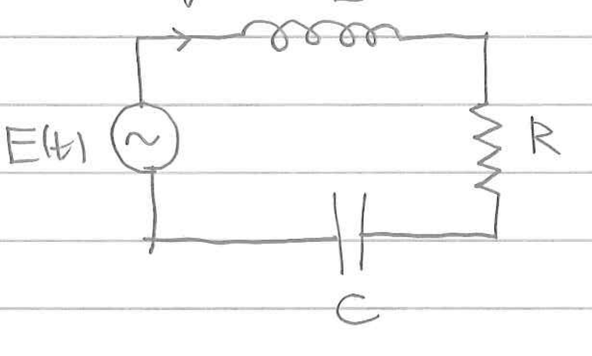
kondensator 

$\frac{1}{C}q$, C kapacitans

resistor 

Ri

$$i = \frac{dq}{dt}$$

RLC-krets 

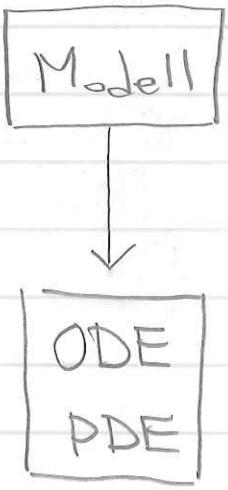
E(t) drivande spänning

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q$$

Insättning av $i = \frac{dq}{dt}$ ger

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t) \qquad (9)$$

(8) och (9) är samma ODE. Vi ser att en och samma ekvation kan ha olika tolkningar beroende på sammanhang.



- Exakta lösningar, formler

  Speciellt men ger förståelse när de finns.

- Allmän matematisk teori

  Existens och entydighet, regularitet, egenskaper hos lösningar, kvalitativ teori

- Approximativa lösningar

  Numeriska lösningsmetoder i form av algoritmer implementerade i datorer. Nödvändigt i de flesta tillämpningar. Färdig programvara.