Föreläsning 19

SF1633 Differentialekvationer HT18. Kurt Johansson

Blandade tentamensproblem

Ex. Funktionen $f(x) = 2x-1$, $-2<x<2$, utvecklas i en Fourierserie i intervallet $-2<x<2$.

a) Bestäm summan av den erhållna Fourierserien på intervallet $2<x<6$. Vad är seriens summa i punkten $x=6$?

b) Visa att alla cosinuskoefficienter a_n i Fourierserien är $=0$ då $n\geq 1$. Undvik långa räkningar!

Lösning: Vi kan utvidga f till en periodisk funktion med perioden 4 genom att kräva

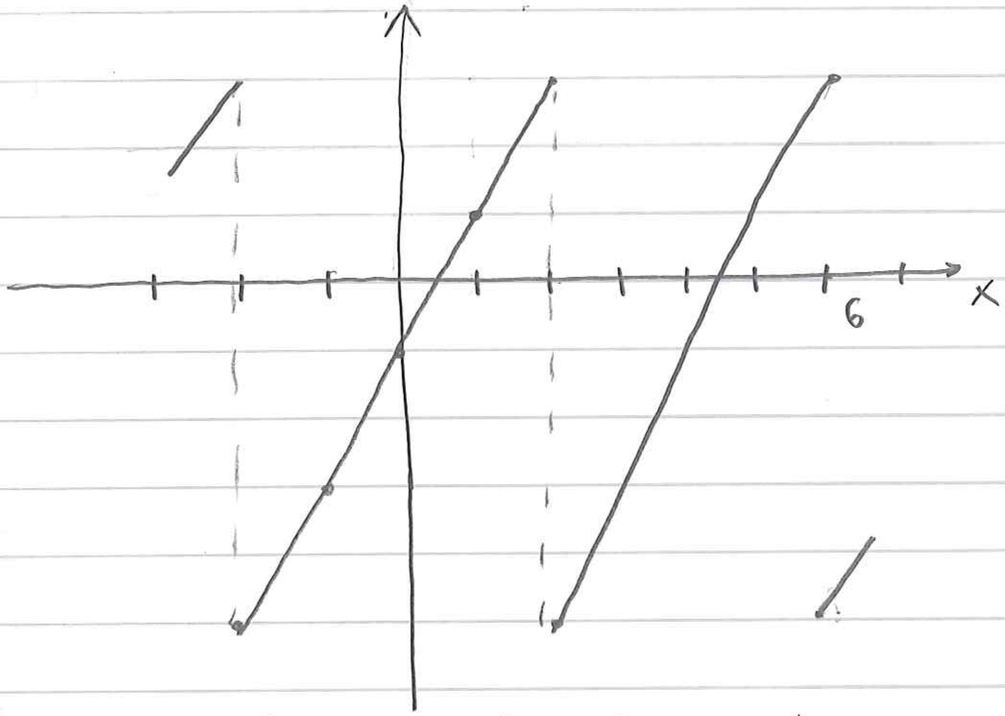
$$f(x+4k) = f(x) \text{ för alla } k\in\mathbb{Z}.$$

Denna funktion har en Fourierserie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{2}x + b_n \sin\frac{\pi n}{2}x \qquad (1)$$

Funktionen f är styckvis kontinuerligt deriverbar och (1) gäller i alla kontinuitetspunkter för f. Alla punkter i $2<x<6$ är kontinuitetspunkter och vi får att seriens summa ges av

$f(x) = f(x-4) = 2(x-4)-1 = 2x-9$ om $2<x<6$.



$x=6$ är en diskontinuitetspunkt men höger- och vänster-gränsvärdet existerar. Alltså blir summan,

$$\frac{f(6-)+f(6+)}{2} = \frac{f(2-)+f(2+)}{2} = \frac{f(2-)+f(-2+)}{2}$$

$$= \frac{2\cdot 2-1+2\cdot(-2)-1}{2} = -1.$$

Svar: Summan i $2<x<6$ ges av $2x-9$. Summan i $x=6$ ges av -1.

b) Vi ser att

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2x-1)\,dx = -2$$

Om $-2<x<2$ får vi alltså

$$2x-1 = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{2}x + b_n \sin\frac{\pi n}{2}x$$

eller

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{2}x + b_n \sin\frac{\pi n}{2}x .$$

Eftersom $2x$ är en udda funktion i intervallet $-2<x<2$ så är alla $a_n = 0$, $n \geq 1$.

Ex. Bestäm den 2π-periodiska lösningen till

$$y'(t) + 2y(t-\pi) = \sin t \,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(delay-differential equation; retarded differential equation)

Lösning: Utveckla lösningen $y(t)$ i en Fourierserie

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

med perioden 2π. Vi får

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nt + nb_n \cos nt$$

$$y(t-\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(t-\pi) + b_n \sin n(t-\pi)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nt + (-1)^n b_n \sin nt$$

Insättning i ekvationen ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt - na_n \sin nt + 2\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nt + (-1)^n b_n \sin nt\right) = \sin t$$

$\Leftrightarrow$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n + 2(-1)^n a_n) \cos nt + (-na_n + 2(-1)^n b_n) \sin nt = \sin t$$

Endast koefficienten för $\sin t$ i VL är $\neq 0$.
Vi får

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ -na_n + 2(-1)^n b_n = 0, \; n>1 \\ nb_n + 2(-1)^n a_n = 0, \; n>1 \\ b_1 - 2a_1 = 0, \; n=1 \\ -a_1 - 2b_1 = 1, \; n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0, \; n>1 \\ b_n = 0, \; n>1 \\ a_1 = -\frac{1}{5} \\ b_1 = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Den sökta lösningen är

$$y(t) = -\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t.$$

Ex. Funktionen f är periodisk med perioden 2π och

$$f(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi.$$

Ange dess Fourierserie och beräkna utgående från den summorna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Lösning: f är jämn så vi får en ren cosinusserie

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[t^2 \frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2t\frac{\sin nt}{n}\,dt$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi t\sin nt\,dt = \frac{4}{\pi n}\left[t\,\frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi - \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi \frac{\cos nt}{n}\,dt$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{4}{\pi n^2}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Eftersom f är styckvis kontinuerligt deriverbar och kontinuerlig på $\mathbb{R}$ så konvergerar Fourierserien överallt mot f,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nt,\ t\in\mathbb{R}$$

Insättning av $t=0$ ger

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\Big(\underbrace{-1+\frac{1}{4}}_{<0}\ \underbrace{-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}_{<0}\ \underbrace{-\frac{1}{25}+\frac{1}{36}}_{<0}-\dots = -\frac{\pi^2}{12}$$, rimligt med negativt värde)

Insättning av $t=\pi$ ger $(\cos n\pi = (-1)^n)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ex Bestäm en funktion $u = u(x,y)$ som satisfierar den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad , (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

och villkoret $u(x,0) = 7x^4 + 2$.

Lösning: Vi söker först lösningar på produktform

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY'$$

Insättning i ekvationen ger

$$xX'Y - 2XY' = 0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{X'}{X} = 2\frac{Y'}{Y} = \lambda \text{, konstant}$$

Vi får ekvationerna

$$X' = \lambda x X \quad , \quad Y' = \frac{1}{2}\lambda Y$$

som har lösningarna

$$X(x) = c_1 x^\lambda \quad , \quad Y(y) = c_2 e^{\frac{1}{2}\lambda y}$$

Alla produktlösningar har alltså formen

$$u(x,y) = cx^\lambda e^{\frac{1}{2}\lambda y}.$$

Vi kan bilda linjärkombinationer av sådana lösningar och få nya lösningar eftersom ekvationen är homogen. För produktlösningen får vi

$$U(x,0) = cx^{\lambda}.$$

Väljer vi $c=7$, $\lambda=4$ får vi $7x^4$ och väljer vi $c=2$, $\lambda=0$ får vi 2. Låt

$$U(x,y) = 7x^4e^{2y} + 2$$

Då satisfierar $U(x,y)$ ekvationen och $U(x,0) = 7x^4+2$.

<u>Svar:</u> $U(x,y) = 7x^4e^{2y} + 2.$

Ex. Bestäm alla lösningar på formen

$$u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$$

till

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

i de fall där "R-ekvationen" har lösningar på formen Cr^p, $p \neq 0$.

(Detta är Laplace ekvation i planet i polära koordinater.)

Lösning. Insättning av $u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$ i ekv. ger

$$R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{r^2}RT'' = 0$$

$$(RT \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{T''}{T} = 0$$

$$(r \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ T'' + \lambda T = 0 \end{cases}$$

Vi gör ansatsen $R(r) = r^p$

$$r^2 p(p-1) r^{p-2} + r p r^{p-1} - \lambda r^p = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(p(p-1) + p - \lambda) r^p = 0$$

$\Leftrightarrow \quad p^2 = \lambda \quad ,$

Vi ser att $\lambda > 0$ eftersom $p \neq 0$. Skriv $\lambda = \mu^2, \mu > 0$.

Vi får $p^2 = \mu^2 \Leftrightarrow p = \pm\mu$. R-ekvationens lösning blir

$$R(r) = c_1 r^{\mu} + c_2 r^{-\mu}$$

T-ekvationen blir

$$T'' + \mu^2 T = 0 \Leftrightarrow T(\theta) = d_1 \cos\mu\theta + d_2 \sin\mu\theta .$$

Produktlösningen blir

$$u(r,\theta) = (c_1 r^{\mu} + c_2 r^{-\mu})(d_1 \cos\mu\theta + d_2 \sin\mu\theta) \quad , \quad \mu > 0$$

om R-ekvationens lösningar skall ha önskad form.