Föreläsning 18

SF1633 Differentialekvationer HT 18, Kurt Johansson.

Derivator av Laplacetransformen

Låt $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Då är

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st} f(t))\,dt$$

inte självklart

$$= \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-st}\, t f(t)\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s).$$

Upprepad användning ger

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

Ex. Beräkna $\mathcal{L}\{t\cosh kt\}$. Vi får att

$$\mathcal{L}\{t\cosh kt\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cosh kt\}(s) = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+k^2}$$

$$= -\frac{s^2+k^2 - s\cdot 2s}{(s^2+k^2)^2} = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}.$$

Def. Låt f och g vara två styckvis kontinuerliga funktioner på $[0,\infty)$. Då definieras faltningen $f*g$ av f och g genom

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Observera att

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \quad \begin{bmatrix} r = t-\tau \\ dr = -d\tau \end{bmatrix} = \int_0^t f(t-r)g(r)\,dr$$

$$= (g*f)(t).$$

Ex. Beräkna $t * \sin 2t$. Definitionen ger

$$t*\sin t = \int_0^t \tau \sin 2(t-\tau)\,d\tau = \left[\frac{\tau}{2}\cos 2(t-\tau)\right]_0^t$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \cos 2(t-\tau)\,dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin 2(t-\tau)\right]_0^t = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t.$$

En viktig egenskap hos Laplacetransformen är att den gör om faltning till multiplikation.

Sats $\mathcal{L}\{f*g\}(s) = F(s)G(s)$

om $\mathcal{L}\{f\} = F$ och $\mathcal{L}\{g\} = G$.

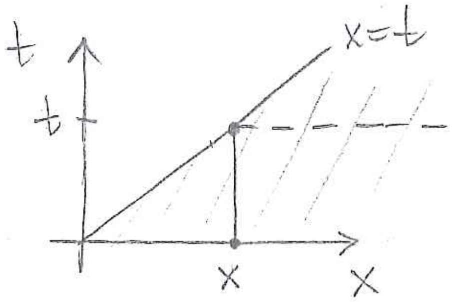
Bevis: Vi har att

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-sr} g(r)\,dr\right)$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(t+r)} f(t)g(r)\,dr = \int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty e^{-s(t+r)} g(r)\,dr\right)dt$$

I den inre integralen sätter vi $x = t+r$ som ny variabel istället för r (t fix), $r = x-t$, $dr = dx$ och integrationen i x blir från t till ∞. Vi får

$$\int_0^\infty f(t)\left(\int_t^\infty e^{-sx} g(x-t)\,dx\right)dt \qquad \begin{bmatrix} t \geq 0,\ x \geq t \\ 0 \leq t \leq x,\ x \geq 0 \end{bmatrix}$$



Byt integrationsordning, dvs. integrera först m.a.p t och sedan m.a.p. x. Givet x varierar t mellan 0 och x.

Vi får

$$\int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(t) g(x-t)\,dt\right)dx = \int_0^\infty e^{-sx}(f*g)(x)\,dx$$

$$= \mathcal{L}\{f*g\}(s).$$

Ex.

$$\mathcal{L}\{t * \sin 2t\} = \mathcal{L}\{t\}\,\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{s^2(s^2+4)}$$

$$= \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2(s^2+4)}$$

Alltså är

$$t * \sin 2t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t,$$ precis som ovan.

Om vi tar $g \equiv 1$ (g identiskt $= 1$) så får vi

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau .$$

Eftersom $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ så ger satsen en formel för Laplacetransformen av en integral:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} ,$$

Ex. Beräkna $\mathcal{L}\left\{t \int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau\right\}(s)$

$$= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau\right\}(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\mathcal{L}\{te^{-t}\}(s)\right) \quad (*)$$

Nu är

$$\mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^{-t}\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2} ,$$

Alltså

$$(*) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right) = \frac{(s+1)^2 + s \cdot 2(s+1)}{s^2(s+1)^4} = \frac{3s+1}{s^2(s+1)^3} .$$

Svar: $\dfrac{3s+1}{s^2(s+1)^3}$.

Faltning dyker upp på ett naturligt sätt i samband med differentialekvationer. Betrakta

$$\begin{cases} y' + ay = g(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

En integrerande faktor ges av e^{at} och vi får

$$y(t) = e^{-at} \int e^{at} g(t)\,dt + Ce^{-at}$$

Vi kan få $y(0)=0$ genom att ta

$$y(t) = e^{-at} \int_0^t e^{as} g(s)\,ds = \int_0^t e^{-a(t-s)} g(s)\,ds$$

$$= e^{-at} * g(t)$$

Löser vi med Laplacetransform får vi

$$sY(s) + aY(s) = G(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s+a} G(s)$$

dvs.

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-at}\}\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$

vilket ger

$$y(t) = e^{-at} * g(t)$$

precis som ovan.

Volterras integralekvation

Låt $g(t)$ och $h(t)$ vara kända funktioner på $[0,\infty)$. Vi söker $f(t)$ som satisfierar integralekvationen

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

vilken med hjälp av faltning kan skrivas som

$$f = g + f*h.$$

Laplacetransformering ger

$$F(s) = G(s) + F(s)H(s) \Rightarrow F(s) = \frac{G(s)}{1-H(s)}.$$

Ex. Lös integralekvationen

$$f(t) = 2t - 4\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

Laplacetransformering ger

Laplacetransf. av sint

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - 4F(s)\frac{1}{1+s^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{4}{1+s^2}\right)F(s) = \frac{2}{s^2} \Leftrightarrow \frac{5+s^2}{1+s^2}F(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow F(s) = \frac{2(1+s^2)}{s^2(5+s^2)} = \frac{2}{5}\frac{1}{s^2} + \frac{8}{5}\frac{1}{s^2+5}$$

Om $x = s^2$ får vi

$$\frac{1+x}{x(5+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{5+x} = \frac{(A+B)x+5A}{x(5+x)}$$

$A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{4}{5}$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{s^2} + \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{s^2 + (\sqrt{5})^2}$$

Invers Laplacetransformering ger

$$f(t) = \frac{1}{5} t + \frac{8}{5\sqrt{5}} \sin t\sqrt{5}.$$

Diracs deltafunktion (= enhetsimpuls)

Diracs deltafunktion $\delta(t-t_0)$, $t_0 > 0$, är en "funktion" sådan att

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

för alla kontinuerliga (eller tillräckligt hyggliga) funktioner f. Speciellt, med $f \equiv 1$, får vi

$$\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt = 1$$

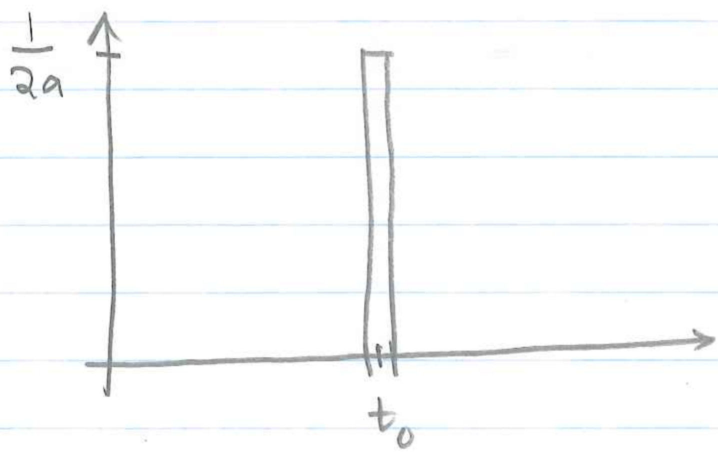
Problemet är att ingen funktion δ uppfyller detta utan δ är en slags "generaliserad funktion".

$\delta(t-t_0)$ är en <u>enhetsimpuls</u> vid tiden t_0.

En approximation ges av

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \le t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & \text{om } t_0 - a \le t < t_0 + a \\ 0 & \text{om } t > t_0 + a \end{cases}$$

där a är litet



I lämplig mening gäller $\delta(t-t_0) = \lim_{a \to 0+} \delta_a(t-t_0)$, ty

$$\int_0^\infty f(t)\delta_a(t-t_0)\,dt = \frac{1}{2a}\int_{t_0-a}^{t_0+a} f(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ kont.}}}{\approx} \frac{1}{2a}\int_{t_0-a}^{t_0+a} f(t_0)\,dt = f(t_0).$$

Approximationen blir bättre och bättre ju mindre a är.

$$\lim_{a \to 0+} \int_0^\infty f(t)\delta_a(t-t_0)\,dt = f(t_0).$$

Vi ser att $\delta(t-t_0)$ ska vara 0 om $t \neq t_0$ och $+\infty$ om $t=t_0$. En sådan funktion är inte väldefinierad och går inte att integrera.

Laplacetransformen blir

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0} \quad , t_0 > 0.$$

Vi kan låta $t_0 \to 0+$ så att vi får en enhetsimpuls i $t=0$.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 .$$

<u>Ex.</u> Lös ekvationen $y'' + y = \delta(t-2\pi)$, $y(0)=y'(0)=0$.

Vi kickar till en odämpad fjäder vid tiden $t=2\pi$.

Laplacetransformering ger

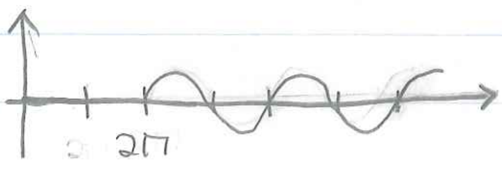
$$s^2F(s) + F(s) = e^{-2\pi s}$$

$$F(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} \quad ; \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

Kom ihåg: $\mathcal{L}\{g(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}G(s)$.

Alltså är

$$f(t) = \mathcal{U}(t-2\pi)\sin(t-2\pi) = \mathcal{U}(t-2\pi)\sin t$$



Ingenting händer till $t=2\pi$ därefter en sinussvängning $\sin t$.

Kommentarer

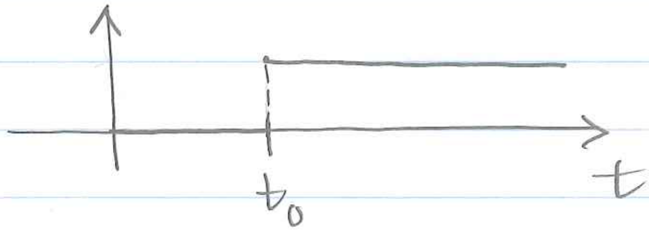
1) Observera att formellt är enligt våra räkneregler

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}U(t-t_0)\right\} = s\mathcal{L}\{U(t-t_0)\} - \underbrace{U(-t_0)}_{=0}$$

$$= s \cdot \frac{1}{s} e^{-st_0} = e^{-st_0}$$

så vi borde ha

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt}U(t-t_0)$$



Derivatan av steg-funktionen är $= 0$ överallt utom i språngpunkten där den är ∞, vad nu det betyder!

2) Betrakta differentialekv.

$$P(D)y = \delta(t)$$, där P är ett polynom.

Laplacetransformering ger (homogent begynnelsevillkor)

$$P(s)Y(s) = 1 \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{P(s)}$$ = överförings-funktionen $W(s)$.

Överföringsfunktionen är Laplacetransformen av responsen på en enhetsimpuls.

System av ODE med konstanta koefficienter

Ex. Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2U(t-1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y + U(t-1) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $x(0) = 0$, $y(0) = 1/2$.

Laplacetransformera. $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$.

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 4X(s) - 2Y(s) + \frac{2}{s}e^{-s} \\ sY(s) - y(0) = 3X(s) - Y(s) + \frac{1}{s}e^{-s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-4)X(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s}e^{-s} \\ -3X(s) + (s+1)Y(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s}e^{-s} \end{cases} \qquad (*)$$

Kramers regel

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \; y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

För (*) får vi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-4 & 2 \\ -3 & s+1 \end{vmatrix} = (s-4)(s+1)+6 = s^2-3s+2$$

$$= (s-1)(s-2)$$

$$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{s}e^{-s} & 2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{s}e^{-s} & s+1 \end{vmatrix} = \frac{2}{s}(s+1)e^{-s} - 1 - \frac{2}{s}e^{-s}$$

$$= -1 + 2e^{-s}$$

Alltså

$$X(s) = \frac{-1+2e^{-s}}{(s-1)(s-2)} = -\frac{1}{(s-1)(s-2)} + \frac{2}{(s-1)(s-2)}e^{-s}$$

Vi måste beräkna den inversa Laplacetransformen.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right\} = e^{2t} - e^{t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}e^{-s}\right\} = \left(e^{2(t-1)} - e^{t-1}\right)U(t-1)$$

Detta ger

$$x(t) = -e^{2t} + e^{t} + 2\left(e^{2(t-1)} - e^{t-1}\right)U(t-1)$$

Återstår att beräkna $y(t)$.

$$\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-4 & \frac{2}{s}e^{-s} \\ -3 & \frac{1}{2}+\frac{1}{s}e^{-s} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}s-2+e^{-s}-\frac{4}{s}e^{-s}+\frac{6}{s}e^{-s} = \frac{1}{2}s-2+e^{-s}+\frac{2}{s}e^{-s}$$

Vi får

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}s-2+e^{-s}+\frac{2}{s}e^{-s}}{(s-1)(s-2)} = \frac{\frac{1}{2}s-2}{(s-1)(s-2)} + \frac{s+2}{s(s-1)(s-2)}e^{-s}$$

Nu är

$$\frac{s/2-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s/2-2}{(s-1)(s-2)}\right\} = \frac{3}{2}e^{t} - e^{2t}$$

$$\frac{s+2}{s(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s(s-1)(s-2)}e^{-s}\right\} = (1-3e^{t-1}+2e^{2(t-1)})U(t-1)$$

Sammanfattningsvis!

$$x(t) = \begin{cases} -e^{2t}+e^{t} & \text{om } 0\le t<1 \\ (2e^{-1}-1)e^{2t}+(1-2e^{-1})e^{t} & \text{om } t>1 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} -e^{2t}+\frac{3}{2}e^{t} & \text{om } 0\le t<1 \\ 1+(-1+2e^{-1})e^{2t}+(\frac{3}{2}-3e^{-1})e^{t}, & \text{om } t>1 \end{cases}$$

Kontrollera genom insättning!