Föreläsning 17

SF1633 Differentialekvationer HT18. Kurt Johansson.

Invers Laplacetransformation

Sats (Entydighet för Laplacetransformen).
Låt $f_1(t)$ och $f_2(t)$ vara två styckvis kontinuerliga och av exponentiell typ. Antag att $F_1(s)$ och $F_2(s)$ är deras respektive Laplacetransformer. Antag att

$$F_1(s) = F_2(s) \quad , \text{för alla } s > a$$

för någon konstant a. Då är $f_1(t) = f_2(t)$, $t \geq 0$, i alla kontinuitetspunkter för både f_1 och f_2.

Detta betyder att den inverse Laplacetransformen (väsentligen) är väldefinierad, vi kan skriva

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

om $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Vi kan läsa en tabell över Laplacetransformer baklänges.

Ex. Beräkna $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$. I en tabell ser vi att

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}.$$

Skriv $$\frac{1}{4s^2+1} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{s^2+1/4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1/2}{s^2+(1/2)^2}$$

Alltså är $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\} = \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$.

Ex. Bestäm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$

Gör en partialbråksuppdelning

$$\frac{s}{(s+2)(s^2+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{(A+B)s^2+(2B+C)s+4A+2C}{(s+2)(s^2+4)}$$

Vi får

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=1 \\ 4A+2C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/4 \\ B=1/4 \\ C=1/2 \end{cases}.$$

Alltså är

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\} = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$$

Svar: $-\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$

Vi vill nu använda Laplacetransformen för att lösa vissa begynnelsevärdesproblem för differentialekvationer.

Transform av derivata

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}\,dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})\,dt$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = sF(s) - f(0)$$

där $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Alltså,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0).$$

Upprepad partiell integration ger

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Vi kan använda dessa formler för att transformera ett begynnelsevärdesproblem. Betrakta ett en andra ordningens ekvation. Problem av högre ordning behandlas analogt.

$$\begin{cases} a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(t) \leftarrow \text{"input"} \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Om $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ och $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ ger Laplace-transformering

$$a_2(s^2 Y(s) - sy_0 - y_1) + a_1(sY(s) - y_0) + a_0 Y(s) = G(s)$$

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) - a_2 y_0 s - a_2 y_1 - a_1 y_0 = G(s)$$

$$\underbrace{(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}_{\substack{P(s)\\ \text{ekvationen}}} Y(s) = \underbrace{a_2 y_0 s + a_2 y_1 + a_1 y_0}_{\substack{Q(s)\\ \text{begynnelsevillkor}}} + \underbrace{G(s)}_{\text{input}}$$

$$P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$$

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)}$$

Använd nu inversa Laplacetransformen för att få $y(t)$.

Ex. Lös $y'' + 5y' + 4y = e^{-2t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

genom Laplacetransformering.

Låt $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$(s^2 + 5s + 4)Y(s) - s - 5 = \frac{1}{s+2}$$

$$(s^2 + 5s + 4)Y(s) = s + 5 + \frac{1}{s+2}$$

$s^2 + 5s + 4 = 0 \Leftrightarrow s = -1$ eller -4.

$$s^2 + 5s + 4 = (s+1)(s+4)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+5}{(s+1)(s+4)}}_{\uparrow \text{ Från beg. villkor}} + \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+4)(s+2)}}_{\uparrow \text{ Från högerled}}$$

$$\frac{s+5}{(s+1)(s+4)} = \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+1)(s+4)}\right\} = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} = y_1(t)$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+4)(s+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+4)(s+2)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{-4t} = y_2(t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

Svar: $y(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$

Vi kan verifiera att

$$y_1'' + 5y_1' + 4y_1 = 0, \quad y_1(0) = 1, \; y_1'(0) = 0$$

så y_1 löser den homogena ekvationen med begynnelsevillkoren,

$$y_2'' + 5y_2' + 4y_2' = e^{-2t}, \quad y_2(0) = 0, \; y_2'(0) = 0$$

så y_2 löser den inhomogena ekvationen med homogent begynnelsevillkor.

Ekvation $P(D)y = g$, $D = \frac{d}{dx}$, P polynom

P karakteristiska polynomet.

Homogent randvillkor: $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$.

Laplacetransformering ger

$$P(s)\,Y(s) = G(s) \Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{1}{P(s)}}_{=W(s)} G(s)$$

$W(s) = \frac{1}{P(s)}$ kallas <u>överföringsfunktion</u>.

$$g(t) \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow y(t)$$

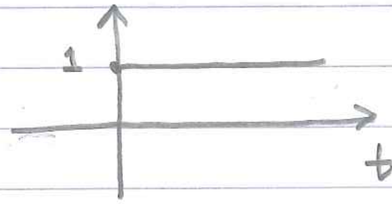
input $\qquad$ $W(s)$ $\qquad$ output

$$G(s) \longrightarrow W(s)G(s) = Y(s)$$

<u>Translationer och stegfunktioner</u>

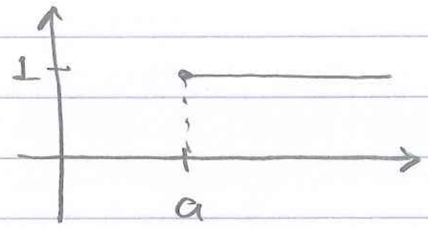
<u>Stegfunktionen</u> eller <u>Heavisidefunktionen</u> ges av

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } t \geq 0 \\ 0 & \text{om } t < 0 \end{cases}$$



(Många beteckningar $\Theta, H, h, \ldots$)

$$U(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{om } t \geq a \\ 0 & \text{om } t < a \end{cases}$$



En styckvis definierad funktion

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases}$$

kan skrivas

$$f(t) = g(t) - g(t)U(t-a) + h(t)U(t-a)$$

Det finns ett antal räkneregler för Laplacetransformen relaterade till stegfunktioner och translation:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\} = e^{-as}F(s) \qquad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{U(t-a)\} = \frac{1}{s}e^{-as}.$$

Dessa följer direkt från definitionen. Till exempel visas den andra formeln på följande sätt

$$\mathcal{L}\{f(t-a)U(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)U(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_a^\infty f(t-a)e^{-s(t-a)-as}\,dt \quad [\tau = t-a]$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-as}F(s).$$

Ex. Beräkna

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{4t}\} = \mathcal{L}\{t^2\}_{s \to s-4} = \frac{2}{s^3}\Big|_{s \to s-4} = \frac{2}{(s-4)^3}.$$

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' + y = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq t < \pi \\ 3\cos t & \text{om } t \geq \pi \end{cases},$$

$$y(0) = 5.$$

Med hjälp av Heaviside funktionen kan vi skriva ekvationen

$$y' + y = (3\cos t)\,\mathcal{U}(t-\pi)$$

Om $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ ger Laplacetransformering

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = 3\mathcal{L}((\cos t)\,\mathcal{U}(t-\pi)).$$

För att beräkna högra ledet använder vi en av formlerna ovan

$$\mathcal{L}((\cos t)\,\mathcal{U}(t-\pi)) = \mathcal{L}(\cos(t-\pi+\pi)\,\mathcal{U}(t-\pi))$$

$$= -\mathcal{L}(\cos(t-\pi)\,\mathcal{U}(t-\pi)) = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s},$$

där vi använt att $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

Vi får

$$(s+1)Y(s) = 5 - \frac{3s}{s^2+1} e^{-\pi s}$$

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{3s}{(s+1)(s^2+1)} e^{-\pi s}$$

En partialbråksuppdelning ger nu

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} e^{-\pi s} - \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1} e^{-\pi s} - \frac{3}{2}\frac{s}{s^2+1} e^{-\pi s}$$

Nu är $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1}\right\} = 5e^{-t}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} e^{-\pi s}\right\} = e^{-(t-\pi)} U(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} e^{-\pi s}\right\} = \sin(t-\pi) U(t-\pi) = -\sin t \, U(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} e^{-\pi s}\right\} = \cos(t-\pi) U(t-\pi) = -\cos t \, U(t-\pi)$$

Vi får att

$$y(t) = 5e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-(t-\pi)} U(t-\pi) + \frac{3}{2}\sin t \, U(t-\pi) + \frac{3}{2}\cos t \, U(t-\pi)$$

eller

$$y(t) = \begin{cases} 5e^{-t} & , 0 \le t < \pi \\ 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{\pi - t} + \frac{3}{2}\sin t + \frac{3}{2}\cos t & , t \ge \pi \end{cases}$$