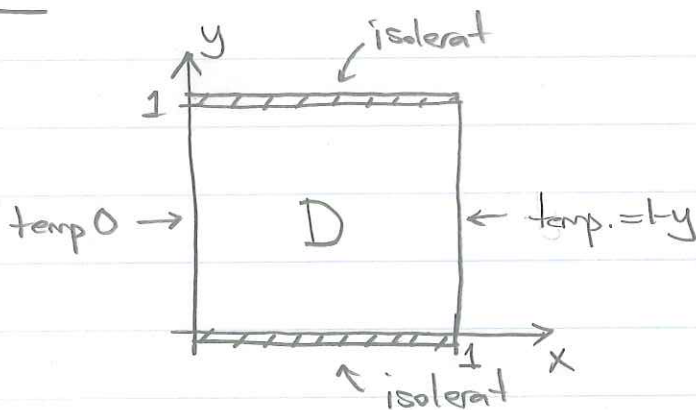


Föreläsning 16

SF1633 Differentialkvationer HT18, Kurt Johansson

Laplace ekvation

Ex. (12.5.5 i boken)



Stationär temperaturfördelning i en platta

$u(x,y)$ = temperaturen i punkten (x,y) , oberoende av t

Värmeledningsekvationen i planet är

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Laplace} \\ \text{ekvation} \end{array} \right)$$

Vi får randvärdesproblemet

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in D \quad (1) \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = ty, \quad 0 < y < 1 \quad (2) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3) \end{array} \right.$$

Vi söker lösningar på produktform (separation av variabler)

$$U(x,y) = X(x)Y(y)$$

Laplace ekvation ger

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

↑
delar med XY

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{konst.} = -\alpha^2$$

$$\begin{cases} X'' - \alpha^2 X = 0 \\ Y'' + \alpha^2 Y = 0 \end{cases}$$

(ger periodiska lösningar i y -led,
vi får många lösningar som uppfyller
(3))

$$Y(y) = c_1 \cos \alpha y + c_2 \sin \alpha y$$

$$(3) \text{ ger } X(x)Y'(0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad Y'(0) = 0$$

$$X(x)Y'(1) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad Y'(1) = 0$$

$$Y'(y) = -\alpha c_1 \sin \alpha y + \alpha c_2 \cos \alpha y$$

$$0 = Y'(0) = \alpha c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ eller } \alpha = 0$$

$$0 = Y'(1) = -\alpha c_1 \sin \alpha + \alpha c_2 \cos \alpha, \quad c_1 \neq 0$$

$\underbrace{\quad}_{=0}$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$$

$$Y_n(y) = c_1 \cos n\pi y, \quad n \geq 0$$

Vi får

$$X'' - \alpha^2 X = 0 \Leftrightarrow X = d_3 e^{\alpha x} + d_4 e^{-\alpha x}$$

om $\alpha \neq 0$. Alternativt kan vi utnyttja $\cosh \alpha x$
 $\sinh \alpha x$,

$$\cosh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}, \quad \sinh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$

som alternativ fundamentalmängd, dvs.

$$X = C_3 \cosh \alpha x + C_4 \sinh \alpha x$$

ger den allmänna lösningen.

Om $\alpha = 0$ får vi $X(x) = d_1 x + d_2$, vilket är fallet
 $n = 0$.

Detta ger lösningarna

$$U_0(x, y) = D_1 x + D_2 \quad (D_1 = c_1 d_1, D_2 = c_1 d_2)$$

$$U_n(x, y) = (A_n \cosh n\pi x + B_n \sinh n\pi x) \cos n\pi y$$

Superpositionsprincipen ger nu att

$$u(x,y) = D_1 x + D_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh n\pi x + B_n \sinh n\pi x) \cos n\pi y$$

satisfierar (1) och (3).

Vi måste bestämma D_1, D_2, A_n och B_n så att (2) gäller,

$$u(0,y) = D_2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi y, \quad 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow D_2 = 0, A_n = 0, n \geq 1$$

$$u(1,y) = D_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh n\pi \cos n\pi y = 1 - y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Vi vill utveckla $1-y$, $0 < y < 1$, i en cosinusserie.
En räkning ger

$$1-y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2 \pi^2} \cos n\pi y, \quad 0 < y < 1$$

Varur

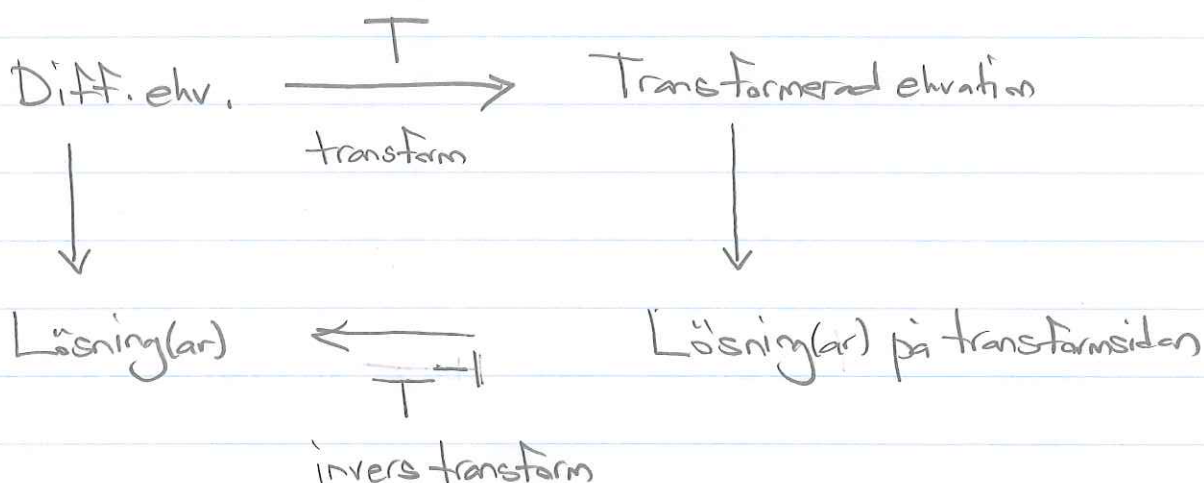
$$D_1 = \frac{1}{2}, \quad B_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2 \pi^2 \sinh n\pi}.$$

Svar: Den stationära temperaturfördelningen ges av

$$u(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \frac{\sinh n\pi x}{\sinh n\pi} \cos n\pi y.$$

Laplace transformen

Transformmetoder för att lösa differentialekvationer har strukturen:



Laplace transformen är ett exempel på en sådan transform som är användbar i många sammanhang.

Ex.
$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t), t \geq 0 \quad (\text{elektrisk krets})$$

\uparrow
 input, drivande funktion

Söker $q(t)$, $t \geq 0$ givet $q(0)$, $q'(0)$ och $E(t)$, $t \geq 0$; systemet "slås på" vid tiden 0.

Vi vill alltså transformera funktioner definierade på $[0, \infty)$.

Def. Låt $f(t)$ vara definierad då $t \geq 0$.

Integralen

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{funktion av } s \in \mathbb{R})$$

kallas Laplacestransformen av f i s förutsatt att integralen konvergerar.

$s \rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ger en ny funktion, Laplacestransformen av f .

$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ är ett vanligt skrivsätt.

Ex. Beräkna $\mathcal{L}\{e^{4t}\}(s)$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{4t} dt = \int_0^{\infty} e^{(4-s)t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{(4-s)t} dt$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(4-s)t}}{4-s} \right]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(4-s)R} - 1}{4-s} = \frac{1}{s-4}$$

$s \neq 4$

om $s > 4$; annars divergent.

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\}(s) = \frac{1}{s-4}$$

Laplacestransformen finns i tabeller för många grundläggande funktioner.

Ex. $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$, $\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{se nedan})$$

\mathcal{L} är en linjär transformation:

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\},$$

vilket följer omedelbart från definitionen.

Vi vill visa en existenssats för Laplacetransformationen.

Def. f sägs vara av exponentiell typ om det finns konstanter $c, M > 0$ och $T > 0$ så att

$$|f(t)| \leq M e^{ct} \quad \text{för alla } t > T.$$

Ex. polynom, e^{at} , $\sin kt$ är av exponentiell typ

e^{t^2} är ej av exponentiell typ

$$e^{t^2} \leq M e^{ct} = e^{ct + \ln M}$$

ger

$$t^2 \leq ct + \ln M \quad \text{för alla } t > T$$

varur

$$t \leq \underbrace{\frac{c}{t} + \frac{\ln M}{t}}_{\rightarrow 0 \text{ då } t \rightarrow \infty} \quad \text{gäller ej för stora } t.$$

$\rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$.

Sats. Om f är styckvis kontinuerlig och av exponentiell typ, så existerar Laplacetransformen $\mathcal{L}\{f\}(s)$ av f om $s > c$.

Bevis: Vi har att

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Integranden kan uppskattas genom

$$|f(t) e^{-st}| \leq M e^{ct} e^{-st} = M e^{(c-s)t}.$$

Om $s > c$ är

$$M \int_0^{\infty} e^{(c-s)t} dt = \frac{M}{s-c} < \infty,$$

dvs. vi får en konvergent integral. Satsen följer nu av jämförelsekriteriet för generaliserade integraler (se lärobok i envariabelanalys). ■

Vi ser från beviset att om f är av exponentiell typ så gäller

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| \leq \frac{M}{s-c} \rightarrow 0 \text{ då } s \rightarrow \infty.$$

Ex. Beräkna Laplacetransformen av $f(t) = t^n$.

(Det är inte svårt att visa att t^n är av exponentiell typ för varje $c > 0$.)

Låt

$$I_n = \mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt, \quad n \geq 0.$$

Partiell integration ger, för $s > 0$, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \left[t^n \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt \\ &= \frac{n}{s} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{s^2} I_{n-2} = \dots = \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{s^n} I_0.$$

Nu är

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s},$$

och följaktligen

$$I_n = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Översikt

Fourierserier i komplex form

Låt f vara en funktion med perioden $2p$. Vi kan då skriva Fourierserien för f i komplex form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{intx/p}$$

där c_n är de komplexa Fourierkoefficienterna.
Av ortogonaliteten

$$\int_{-p}^p e^{intx/p} \cdot e^{-imt x/p} dx = \begin{cases} 0 & \text{om } m \neq n \\ 2p & \text{om } m = n \end{cases}$$

följer att

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) e^{-\frac{intx}{p}} dx.$$

Fouriertransform

f ej periodisk funktion på \mathbb{R} . Vi kan tänka att f är definierad på $[-p, p]$ och sedan låta $p \rightarrow \infty$. Gränsvärdet av formelerna ovan blir då

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

där Fouriertransformen $\hat{f}(\xi)$ av $f(x)$ ges av

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

$\hat{f}(\xi)$ mäter hur mycket $f(x)$ "innehåller" av frekvensen $\xi/2\pi$.

Om $f(t) = 0$ då $t < 0$ blir dess Fouriertransform

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

Sätter vi $\xi = -is$, där i är imaginära enheten, $i^2 = -1$, får vi

$$\hat{f}(-is) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s).$$

Fouriertransformen och Laplacetransformen är alltså nära relaterade.