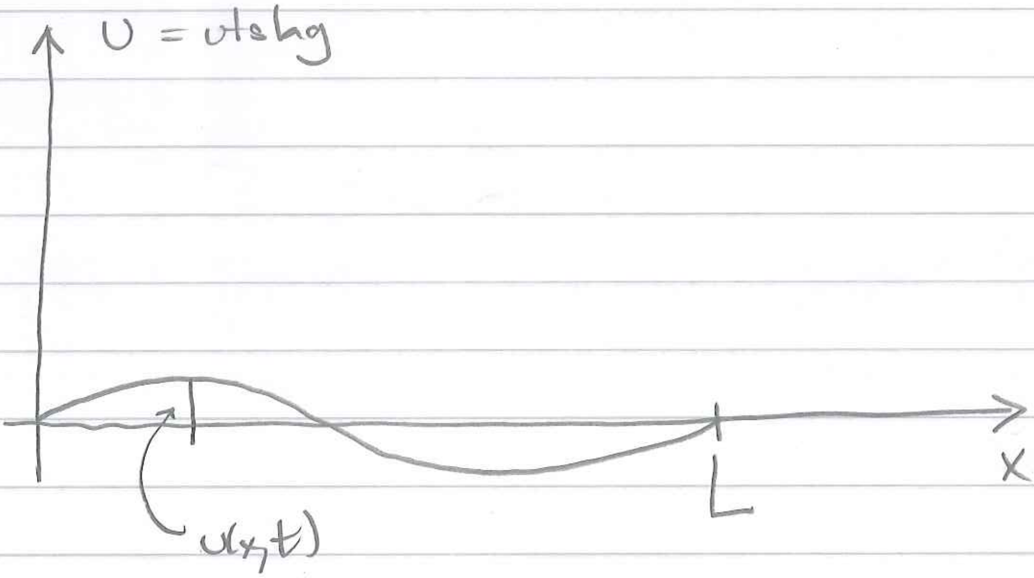
Föreläsning 15

SF1633 Differentialekvationer HT18. Kurt Johansson

Vågekvationen i en rumsdimension

Betrakta en svängande sträng fastsatt i båda ändarna.
Tänk på en sträng på en gitarr.

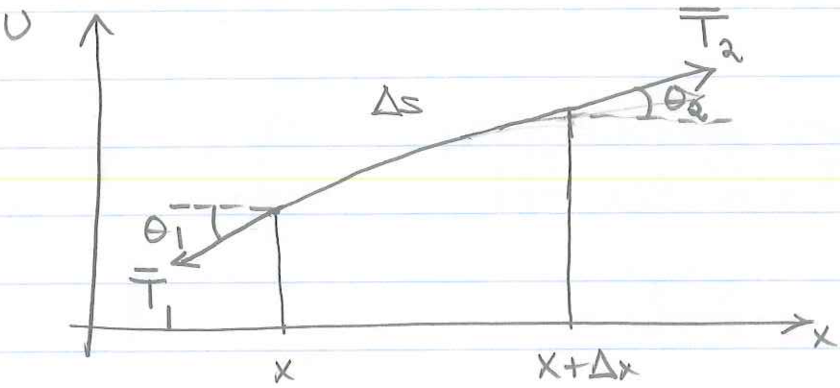


$u(x,t)$ = strängens utslag från jämviktsläget i punkten x vid tiden t.

Vi tänker oss att $u(x,t)$ är litet (jämfört med L).

Skiss av en fysikalisk härledning av vågekvationen för en elastisk sträng

Betrakta en liten del av strängen vid en viss tidpunkt t.



ρ = massa per längdenhet

$m = \rho \Delta s \approx \rho \Delta x$

$\bar{T}_1, \bar{T}_2$ spänningskrafter, $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = T$

Vertikal kraft på strängbiten $= |\bar{T}_2| \sin\theta_2 - |\bar{T}_1| \sin\theta_1$

Antag små utslag så att θ_1 och θ_2 är små. Då är

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\underbrace{\cos\theta_1}_{\text{nära } 1,\ \cos\theta_1 \approx 1-\theta_1^2/2 \approx 1 \text{ om } \theta_1 \text{ liten.}}} \approx \sin\theta_1 .$$

$\tan\theta_1$ är kurvans lutning i $x = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$

$\tan\theta_2$ är kurvans lutning i $x+\Delta x = \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t)$

Newtons andra lag ger

$$\underbrace{m}_{=\rho\Delta x} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\text{vertikal acceleration}} \approx T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1 = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$$

eller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \underbrace{\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)}_{\text{differenskvot för } \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{T}{\rho}$$

Låter vi $\Delta x \to 0$ får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

där $a^2 = T/\rho$. (ρ har enhet kg/m, T har enhet kgm/s^2, så T/ρ har enhet m^2/s^2, dvs. a har enheten m/s.)

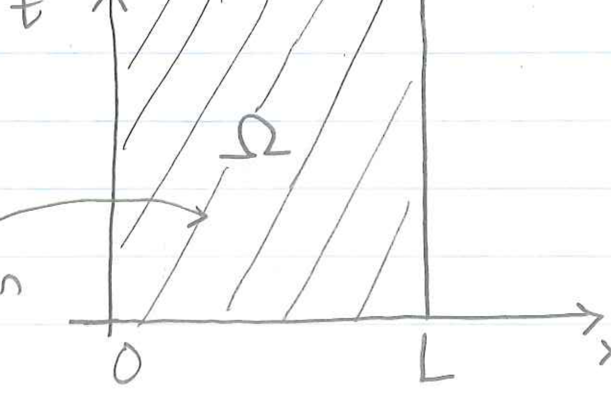
Ett randvärdesproblem för vågekvationen

Betrakta en svängande sträng som ovan.

Ett naturligt problem är då följande:

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \text{vågekvationen}, \ 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t>0 & \text{strängen sitter fast i ändarna} \\ u(x,0) = f(x),\ 0<x<L, & \text{strängens läge vid tiden } 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ 0<x<L, & \text{strängens hastighet vid tiden } 0 \end{cases}$$

$u : \Omega \to \mathbb{R}$



Här inne gäller vågekvationen

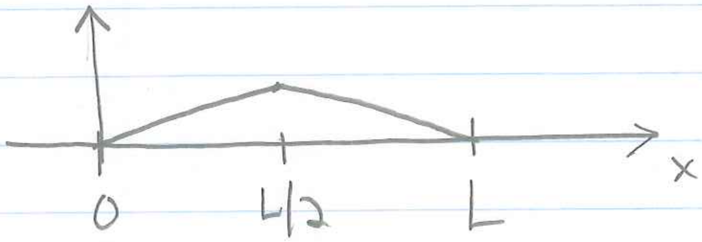
$\Omega = (0,L) \times (0,\infty)$

$= \{(x,t);\ 0<x<L,\ t>0\}$

Vi specificerar vissa värden på randen $\partial\Omega$

Ex.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 < x \leq L/2 \\ \alpha(L-x), & L/2 < x < L \end{cases}$$



Höjd vid $L/2 = \frac{\alpha L}{2}$

α liten

$g(x) = 0$, vi startar från vila.

Vi löser detta problem genom att använda separation av variabler och superpositionsprincipen.

1) Vi söker lösningar på formen

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (\underline{\text{produktlösning}})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

Insättning i vågekvationen ger

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

Alltså

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{beror bara på } x} = \underbrace{\frac{T''(t)}{a^2 T(t)}}_{\text{beror bara på } t}$$

Detta uttryck måste vara en konstant om det ska gälla för alla $(x,t) \in \Omega$.

Tag $t = t_0 > 0$. Då är

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t_0)}{a^2 T(t_0)} \quad \text{för alla } x,\ 0<x<L.$$

Kalla konstanten i högra ledet för $-\lambda$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \text{för alla } 0<x<L. \tag{3}$$

Alltså $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ för alla $t>0$.

X och T skall alltså vara lösningar till de ordinära differentialekvationerna

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & (4) \\ T'' + a^2 \lambda T = 0 & (5) \end{cases}$$

Alla lösningar till dessa ekvationer ger produktlösningar.
Randvillkoret $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t>0$ ger

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0\ ,\ t>0\ ,\text{dvs.}$$

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Vi får alltså randvärdesproblemet

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Om $\lambda = 0$ får vi $X(x) = c_1 x + c_2$ och randvillkoren $X(0) = X(L) = 0$ ger $c_1 = c_2 = 0$. Inte intressant.

Om $\lambda = -\alpha^2 < 0$ får vi $X(x) = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$ och $X(0) = X(L)$ ger $c_1 = c_2 = 0$. Inte intressant.

Om $\lambda = \alpha^2 > 0$ får vi

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

$$X(0) = c_1 = 0 \ , \ X(L) = c_2 \sin \alpha L = 0$$

Om $c_2 \neq 0$ så att vi får en icke-trivial lösning måste vi ha

$$\sin \alpha L = 0 \Rightarrow \alpha L = \frac{n\pi}{L} \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

Alltså $\lambda = \alpha^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2} = \lambda_n$.

$X(x) = c_2 \sin \dfrac{n\pi}{L} x \ , \ n = 1, 2, \ldots$ ger icke-triviala lösningar

(negativa n ändrar bara tecknet, vilket kan bakas in i c_2)

Om vi sätter in $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ i (5) får vi

$$T'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} T = 0$$

som har den allmänna lösningen

$$T(t) = c_3 \cos \frac{n\pi a}{L} t + c_4 \sin \frac{n\pi a}{L} t.$$

Vi får alltså följande lösningar till vågekvationen

$$u(x,t) = \left(c_2 c_3 \cos \frac{n\pi a}{L} t + c_2 c_4 \sin \frac{n\pi a}{L} t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Vi kan välja olika konstanter $c_2 c_3 = A_n$, $c_2 c_4 = B_n$ för olika $n = 1, 2, \ldots$ så vi får lösningarna

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{L} t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (7)$$

Dessa lösningar uppfyller vågekvationen och randvillkoren $u_n(0,t) = u_n(L,t) = 0$ men inte nödvändigtvis de andra villkoren:

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \quad (8)$$

Vi försöker använda superpositionsprincipen. Ekvationen är homogen och linjär och randvillkoret homogent. Summor av lösningarna (7) ger nya lösningar. Vi vill hitta en lösning på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{L} t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (9)$$

Då är

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x), \quad 0 < x < L$$

Vi vill alltså utveckla $f(x)$ i en sinusserie i $0<x<L$ ("half-range expansion"). Detta ger A_n.

Vidare är (vi antar att vi får derivera termvis)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi a}{L}A_n \sin\frac{n\pi a}{L}t + \frac{n\pi a}{L}B_n \cos\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

vilket ger

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{L}B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = g(x).$$

Vi vill också expandera $g(x)$ i en sinusserie i $0<x<L$. Detta ger B_n.

Vi får

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \tag{10}$$

$$\frac{n\pi a}{L}B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx. \tag{11}$$

Diskussion

(9) med A_n och B_n bestämda av (10) och (11) löser alltså vårt begynnelsevärdesproblem.
Vi har att

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$$

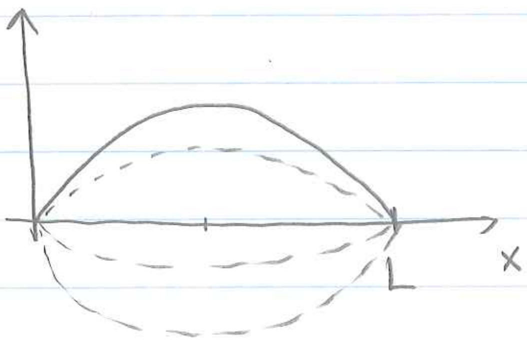
där $\cos\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$, vilhet följer från additionsformeln för sinus. Alltså kan vi skriva

amplitud

$$u_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \varphi_n\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$ stående våg

där $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\cos\varphi_n = \frac{B_n}{C_n}$, $\sin\varphi_n = \frac{A_n}{C_n}$,

$n = 1$



$C_1 \sin\frac{\pi}{L}x$

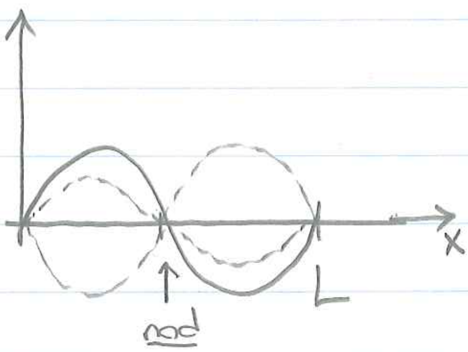
(Detta multipliceras med $\sin\left(\frac{\pi a}{L}t + \varphi_1\right)$ som varierar i tiden.)

[$\sin\omega t = \sin 2\pi f t$, ω vinkelfrekvens, f frekvens]

Frekvensen $= f_1 = \frac{a}{2L}$ $\left(= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)$

Grundton,

$n = 2$



$C_2 \sin\frac{2\pi a}{L}x$

(Multipliceras med $\sin\left(\frac{2\pi a}{L}t + \varphi_2\right)$)

Första övertonen. Frekvens $f_2 = \frac{a}{L} = 2f_1$.

$n \geq 2$ kallas övertoner. Hela svängningen ges som en linjärkombination av grundtonen och övertoner.

Svängande sträng. Transformperspektiv.

Istället för att använda separation av variabler kan vi tänka på följande sätt.

(i) $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $0<x<L$, $t>0$

(ii) $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t>0$

(iii) $u(x,0) = f(x)$, $0<x<L$

(iv) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, $0<x<L$

Vi ansätter en lösning i form av en Fourierserie i x med koefficienter som beror på t. På grund av (ii) väljer vi en sinusserie i x

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

$B_n(t)$ är okända Fourierkoefficienter

Då är $u(0,t) = u(L,t) = 0$ för alla $t>0$.
Vi undersöker nu vad ekvationen ger för villkor på $B_n(t)$.

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 B_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n''(t) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Ekvationen ger

$$B_n''(t) = -\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 B_n(t).$$

Vi har alltså transformerat ekvationen till en ekvation för Fourierkoefficienterna istället.

Vi får

$$B_n(t) = c_n \cos\frac{an\pi}{L}t + d_n \sin\frac{an\pi}{L}t$$

som den allmänna lösningen till denna ODE. Alltså,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos\frac{an\pi}{L}t + d_n \sin\frac{an\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

Detta ger

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{L} = f(x)$$, vilket bestämmer c_n,

och

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{an\pi}{L}c_n \sin\frac{an\pi}{L}t + \frac{an\pi}{L}d_n\cos\frac{an\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Vi får

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{L}d_n \sin\frac{n\pi}{L}x = g(x),$$

vilket bestämmer d_n.