Föreläsning 14

SF1633 Differentialekvationer HT18, Kurt Johansson

Partiella differentialekvationer (PDE)

En linjär andra ordningens PDE för en funktion $u = u(x,y)$ av två variabler ges av

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \qquad (1)$$

där $A, B, \dots, G$ är givna och kan bero på x, y men inte på u eller dess derivator. Ekvationen är homogen om $G = 0$.

För en homogen, linjär PDE gäller superpositionsprincipen, dvs. linjärkombinationer av lösningar ger nya lösningar. Detta är en konsekvens av att den partiella differentialoperatorn

$$L = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F \qquad (2)$$

är en linjär operator,

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L u_1 + c_2 L u_2,$$

c_1, c_2 konstanter, $u_1 = u_1(x,y)$, $u_2 = u_2(x,y)$.

Om $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ är en öppen mängd, så är $u(x,y)$ en lösning till (1) i Ω om u satisfierar (1) för alla $(x,y) \in \Omega$.

Vi kommer bara att betrakta fallet då $A, B, \ldots, F$ är konstanta, dvs. vi har en linjär PDE med konstanta koefficienter.

Ex. Visa att $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ löser ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad (\mathbb{R}^2 \text{ minus origo})$$

Derivering ger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Vi ser att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Antag att A, B, C ej alla är $=0$. Vi gör då klassificeringen

(2) är <u>hyperbolisk</u> om $B^2 - 4AC > 0$

(2) är <u>parabolisk</u> om $B^2 - 4AC = 0$

(3) är <u>elliptisk</u> om $B^2 - 4AC < 0$.

Dessa typer av ekvationer har lösningar med olika egenskaper.

<u>Kommentar</u>: Efter att eventuellt ha multiplicerat med -1 kan vi utan inskränkning anta att $A > 0$. Namnen kommer då av att ekvationen

$$P(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = \text{konst.}$$

ger en ellips om $B^2 - 4AC < 0$, en parabel om $B^2 - 4AC = 0$ och en hyperbel om $B^2 - 4AC > 0$ (bortsett från degenererade fall). Vi har

$$L = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Vi betraktar tre standardexempel på de tre typerna av ekvationer.

1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ en-dimensionella vågekvationen

$A = 1$, $B = 0$, $C = -1/c^2$, $B^2 - 4AC = 1/c^2 > 0$.

(Variabeln y har bytt namn till t eftersom vi vill tänka på x som en rumsvariabel och t som en tidsvariabel.)

Detta är en hyperbolisk ekvation.

2) $$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k>0,$$ en-dimensionella värmeledningsekvationen eller diffusionsekvationen

Parabolisk ekvation.

3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ Laplace ekvation

Elliptisk ekvation

Ex. Ge alla lösningar till $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = f(y) \Rightarrow u(x,y) = F(y) + G(x)$$

f godtycklig

F: primitiv funktion till f

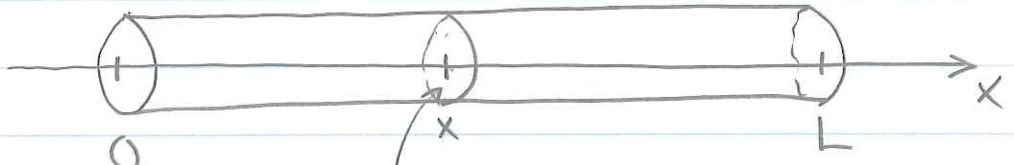
G: godtycklig

Svar: $u(x,y) = F(y) + G(x)$ där F, G är godtyckliga deriverbara funktioner.

Separation av variabler

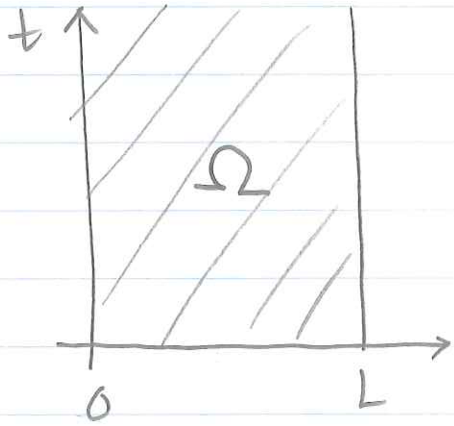
Värmeledningsekvationen

Betrakta temperaturen i en smal kropp, t.ex en smal cylinder, och antag att långsidorna är isolerade och att temperaturen bara varierar längs cylindern:



$u(x,t)$ = temperaturen i tvärsnittet vid x vid tiden t

$(x,t) \in [0,L] \times [0,\infty) = \Omega$



Temperaturen $u(x,t)$ satisfierar ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

där k är en materialkonstant (värmediffusivitet(*)). Samma ekvation beskriver också diffusion; u är då koncentrationen av ett ämne vid x vid tiden t och k en diffusionskonstant.
(Värmeledningsekvationen eller diffusionsekvationen)

Vi behöver lämpliga randvillkor på $\partial\Omega$.

(*) eller temperaturledningsförmåga

$u(x,0) = f(x)$, $0<x<L$ (begynnelsevillkor)

Då $x=0, t>0$ eller $x=L, t>0$ kan vi lägga olika typer av villkor (randvillkor på kroppen)

$u(0,t) = u_0$, $u(L,t)=u_1$, $t>0$ fix temperatur i ändarna. (Dirichlet)

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$, $t>0$ isolerade ändar (Neuman)

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -h(u(0,t)-\underset{\substack{\uparrow \\ \text{omgivande temp.}}}{u_m})$, $t>0$ Flöde av värme genom ändpunkterna. (Robin)

$h>0$ konstant

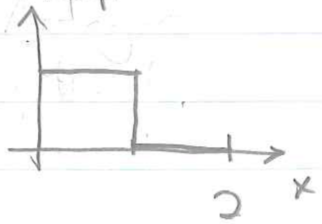
$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -h(u(L,t)-u_m))$, $t>0$

Vi kan också ha kombinationer av dessa t.ex. isolerad i ena änden och fix temperatur i den andra.

Ex. Betrakta ett rör av längd 2 , $0<x<2$, och antag att båda ändarna är isolerade. Om den initiala temperaturfördelningen är

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0<x<1 \\ 0 & \text{om } 1<x<2 \end{cases},$$

bestäm temperaturen $u(x,t)$ vid tiden t.



Vi vill alltså lösa randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<L,\ t>0 \qquad (1) \\ u(x,0)=f(x), & 0<x<L \qquad (2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, & t>0, \qquad (3) \end{cases}$$

där $L=2$ och $f(x)$ är given som ovan.

Den metod vi ska använda kallas separation av variabler.

Vi söker lösningar på formen

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad \text{(produktlösning)}$$

Insättning i ekvationen ger

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = kX''T, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = XT', \text{ dvs. } kX''T = XT'$$

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{beror bara på } x} = \underbrace{\frac{T'(t)}{kT(t)}}_{\text{beror bara på } t} = -\lambda \quad \text{(konstant)}$$

Randvillkoret (3) ger

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t) = 0$$

Lösningar med $T(t)=0$ för alla t är inte intressanta eftersom detta bara ger den triviala lösningen. Alltså är $X'(0)=X'(L)$ och vi får randvärdesproblemet

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 & , 0<x<L \\ X'(0)=X'(L)=0 \end{cases} \qquad (4)$$

och ekvationen

$$T' = -\lambda k T \Rightarrow T(t) = c_3 e^{-\lambda k t}$$

Eftersom $k>0$ och vi inte vill ha lösningar vars temperatur växer exponentiellt med tiden söker vi lösningar med $\lambda = \alpha^2 > 0$.

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \Leftrightarrow X(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x$$

$$X'(x) = -\alpha c_1 \sin\alpha x + \alpha c_2 \cos\alpha x \,, \quad X'(0) = \alpha c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Vi vill ha icke-triviala lösningar, dvs. $c_1 \neq 0$.

$$X'(L) = -\alpha c_1 \sin\alpha L = 0 \Rightarrow \sin\alpha L = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L} \,, n\in\mathbb{Z}$$

vilket ger $X(x) = c_1 \cos\frac{n\pi}{L}x \,, \; T(t) = c_3 e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \,, n \geq 0.$

Vi får produktlösningen

$$u(x,t) = X(x)T(t) = c_1 c_3 e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \cos\frac{n\pi}{L}x \,, \qquad (5)$$

som uppfyller (1) och (3) i vårt randvärdesproblem.

Hur ska vi få villkoret (2) uppfyllt?

Vi kan låta konstanten $(c_1 c_3)$ i (5) bero på n och få lösningar

$$U_0(x,t) = \frac{A_0}{2}$$

$$U_n(x,t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \cos\frac{n\pi}{L}x \quad , \quad n \geq 1.$$

Dessa lösningar uppfyller (1) och (3). Eftersom ekvationen (1) och randvillkoret (3) är homogena och ekvationen (1) är linjär kan vi använda superpositionsprincipen för att ansätta en lösning

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \cos\frac{n\pi}{L}x$$

Att villkoret $u(x,0) = f(x)$ ska vara uppfyllt innebär då

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{L}x = f(x) \quad , \quad 0 < x < L.$$

Vi vill alltså utveckla vår givna funktion $f(x)$ i en cosinusserie i intervallet $0 < x < L$. Detta bestämmer koefficienterna A_n, $n \geq 0$.

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

I vårt fall får vi ($f(x)$ som ovan och $L=2$)

$$A_n = \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}dx = \int_0^1 \cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n>0$$

$$A_0 = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

Vi får alltså lösningen

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\underbrace{e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}kt}}_{\to 0 \text{ då } t\to\infty}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$u(x,t) \to \frac{1}{2}$ då $t\to\infty$, verkar rimligt

Kastar vi bort alla termer utom $n=1$ får vi

$$u(x,t) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{4}kt}\cos\frac{\pi}{2}x$$

(bra approximation om t inte är alltför liten)