# Föreläsning 13

SF1633 Differentialekvationer HT18. Kurt Johansson.

## Cosinus- och sinusserie

Låt $f$ vara en funktion definierad på intervallet $(-p,p)$.
Vi säger att

$f$ är udda på $(-p,p)$ om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in (-p,p)$

$f$ är jämn på $(-p,p)$ om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in (-p,p)$

Ex. $f(x) = \sin x$ och $f(x) = x - x^3$ är udda på $\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$ och $f(x) = x^2$ är jämna på $\mathbb{R}$

Om $f$ är udda på $(-p,p)$ så är

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = 0.$$

Om $f$ är jämn på $(-p,p)$ så är

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{p} f(x)\,dx.$$

1) Om $f$ är udda på $(-p,p)$ är Fourierkoefficienterna

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x}_{\text{udda}}\,dx = 0, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx \;, \quad n\geq 1$$

Fourierserien blir en ren sinusserie:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{p}x$$

2) Om $f$ är jämn ger samma typ av resonemang att Fourierserien för $f$ blir en ren cosinusserie

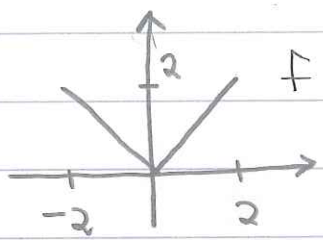
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x \,,$$

där

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \;, \quad n \geq 0 .$$

Ex. Expandera $f(x) = |x|$, $-2 < x < 2$, i en Fourierserie.

Eftersom $f$ är jämn får vi en ren cosinusserie; $p = 2$.




$$a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

om $n \neq 0$

$$= \left[x\,\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

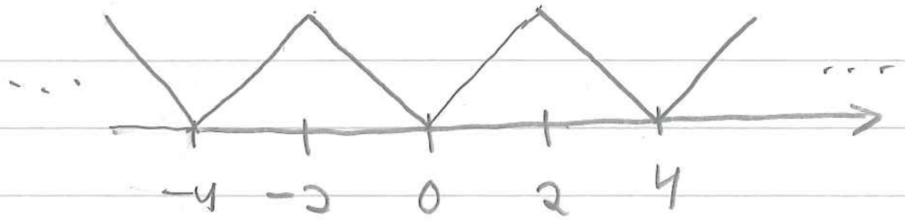
$$a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2$$

Vi får

$$|x| = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi}{2}x \quad , \quad -2 < x < 2$$

(också då $x = \pm 2$)

Detta ger en periodisk utvidgning av $f(x)$ om vi betraktar alla $x \in \mathbb{R}$:




"sågtandsfunktion"

Ex. Bestäm Fourierserien för

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{om} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

udda

Vilket värde ger Fourierserien i $x = 0$?

Vi får en sinusserie

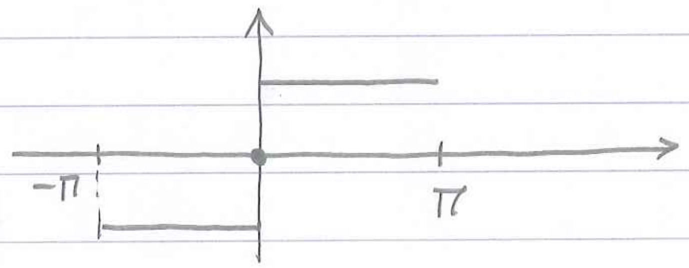
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin nx \qquad \text{om} \begin{cases} -\pi < x < 0 \\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

Vi ser att

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$ = värdet av serien i $x=0$, ses också genom insättning. Alla termer blir $=0$.

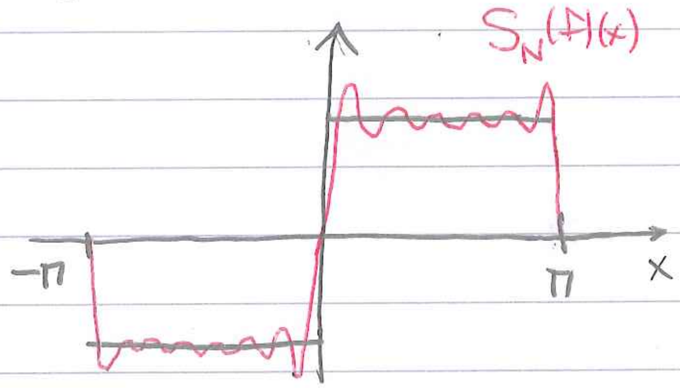
$f(x)$:




Partialsummor

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin nx$$

Eftersom Fourierkoefficienterna avtar långsamt så konvergerar serien långsamt och vi får en särskilt dålig approximation i diskontinuitetspunkten.




Vi får värden $>1$ nära $x=0+$ och $<-1$ nära $x=0-$ oavsett hur stort $N$ är. Approximationerna "slår över" nära diskontinuiteten hur stort $N$ än är.

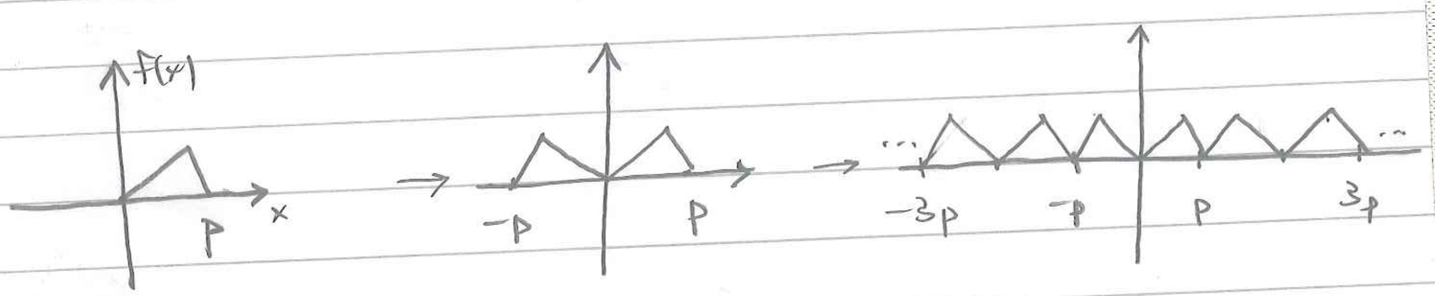
Gibbs fenomen

## Att utveckla en funktion i en sinus- eller cosinusserie

Om vi har en funktion $f$ definierad på intervallet $(0, p)$ och vill utveckla den i en Fourierserie finns det olika möjligheter att göra en periodisk utvidgning

(i) Utvidga till en jämn funktion på $(-p, p)$ som sedan utvidgas till en periodisk funktion med perioden $2p$.

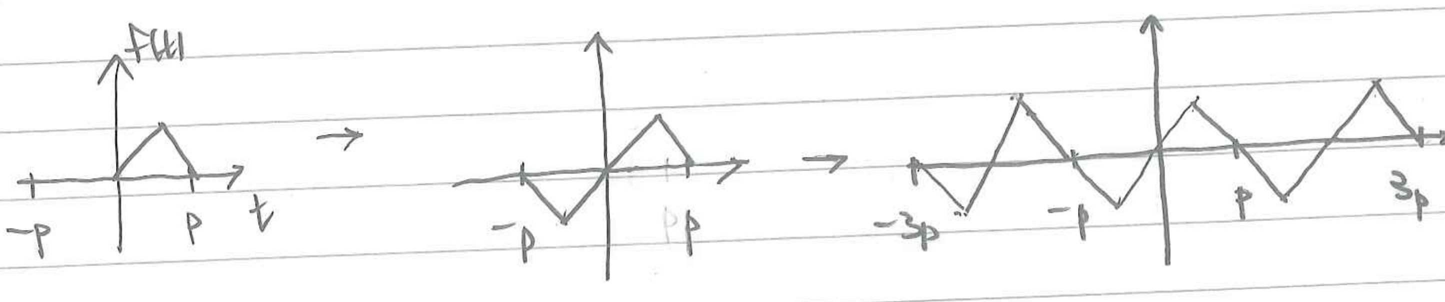
$$f(x) = f(-x), \quad \text{om } -p < x < 0$$




Vi får en cosinusserie

(ii) Utvidga till en udda funktion på $(-p, p)$ som sedan utvidgas till en periodisk funktion med perioden $2p$.

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{om } -p < x < 0$$



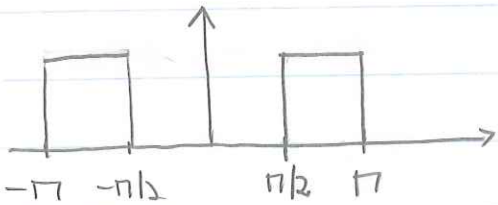

Vi får en sinusserie.

I båda fallen har vi samma funktion på $(0, p)$, det är utvidgningen som skiljer sig åt.

Ex.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{om } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Utveckla f i en Fourierserie i $[0,\pi]$ enligt de två fallen ovan.

(i)



$p = \pi$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\frac{\sin n\pi/2}{n}, \quad n \neq 0$$

$n = 2k$ jämn, $k \geq 1$, $a_{2k} = 0$

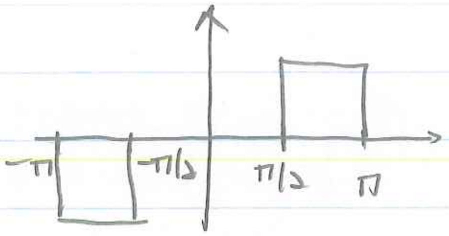
$n = 2k-1$ udda, $k \geq 1$

$$a_{2k-1} = -\frac{2}{\pi}\frac{\sin\frac{2k-1}{2}\pi}{2k-1} = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} dx = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)}\cos(2k-1)x, \quad 0 < x < \pi$$

(ii)




$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\left(-(-1)^n + \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

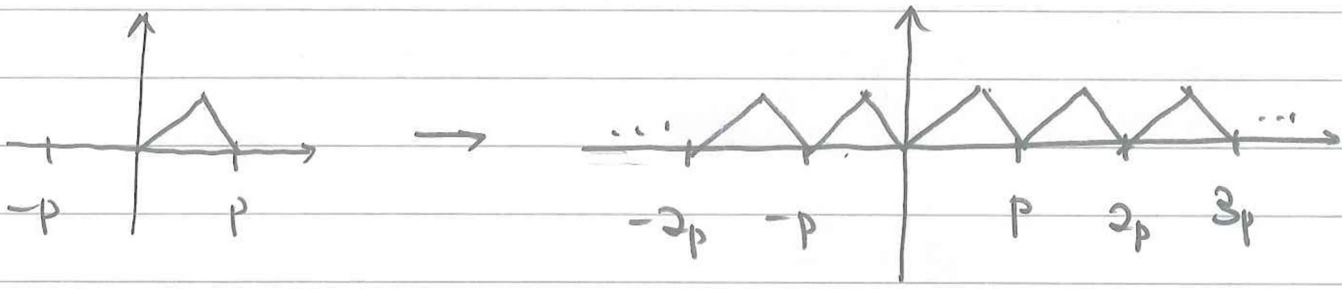
$n = 2h,\ h \geq 1,\quad \cos\frac{n\pi}{2} = \cos \pi h = (-1)^h$

$n = 2h-1,\ h \geq 1,\quad \cos\frac{(2h-1)\pi}{2} = 0,\quad -(-1)^{2h-1} = 1$

$b_{2h-1} = \frac{2}{\pi(2h-1)},\ h \geq 1,\quad b_{2h} = \frac{1}{\pi h}\left((-1)^h - 1\right)$

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^h - 1}{\pi h}\sin 2hx + \frac{1}{\pi(2h-1)}\sin(2h-1)x\right)$$

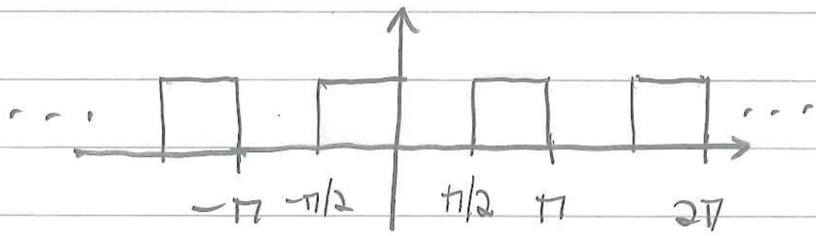
(iii) En tredje möjlighet är att välja att utvidga funktionen till en periodisk funktion med perioden p.




Vi får då i allmänhet en Fourierserie som kan innehålla både sinus- och cosinustermer.

Återigen har vi samma funktion på vårt ursprungsintervall $(0,p)$.

I vårt exempel får vi




$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0\,, \quad n \geq 1$$

$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi/2}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1 + \cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)$$

$n = 2h, \; h \geq 1 \quad , \quad \cos\frac{n\pi}{2} = \cos \pi h = (-1)^h \; , \cos n\pi = 1$

$$b_{2h} = \frac{1}{2\pi h}\left(2(-1)^h - 2\right) = \frac{1}{\pi h}\left((-1)^h - 1\right)$$

$n = 2h-1, \; h \geq 1 \quad , \quad \cos\frac{n\pi}{2} = 0 \; , \; \cos(2h-1)\pi = -1$

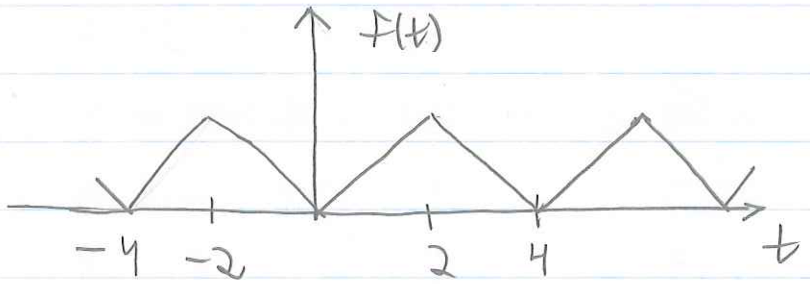
$b_{2h-1} = 0 .$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h - 1}{\pi h} \sin 2hx$$

Ex. Hitta en partikulärlösning till

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)$$

där $m=k=1$ och $f(t)$ är en periodisk kraft:




$f(t)=|t|$,
$-2<t<2$

Tag $m=k=1$.
Vi söker en periodisk lösning (jämn):

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{2}t$$

Derivering två gånger ger (vi antar att vi får derivera termvis)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{n\pi}{2}t \qquad \left[\frac{d^2}{dt^2}\cos at = -a^2\cos at\right]$$

Vänstra ledet i ekvationen blir $(m=k=1)$

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(1-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)\cos\frac{n\pi}{2}t = \frac{d^2x}{dt^2} + x$$

Från ett tidigare exempel vet vi att

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}t$$

Vi ser att vi vill ha

$$\frac{A_0}{2} = 1 \,, \quad A_n\left(1-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right) = \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$A_0 = 2 \,, \quad A_n = \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2\left(1-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)} \,, n \geq 1 .$$

( Vi ser att

$$1-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \neq 0 \text{ för alla } n \geq 1 .$$

En partikulärlösning ges alltså av

$$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2(1-n^2\pi^2/4)} \cos\frac{n\pi}{2}t \qquad (1)$$

( Vi måste egentligen visa att det är tillåtet att derivera termvis två gånger för att se att detta verkligen är en lösning.)

<u>Transformperspektiv</u>

f periodisk med period $2p$ $\rightleftarrows$ $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ Fourierkoeff.

$$\text{Periodisk funktion} \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow \text{Fourierkoefficienter}$$

Fourierkoefficienterna kan ses som en transform av funktionen. Ovan hittade vi en lösning till differentialekvationen genom att lösa den på transformsidan, dvs. beräkna dess Fourier-koefficienter. Vi transformerar sedan tillbaka till funktionssidan i (1), vi "inverstransformerar".