Föreläsning 12

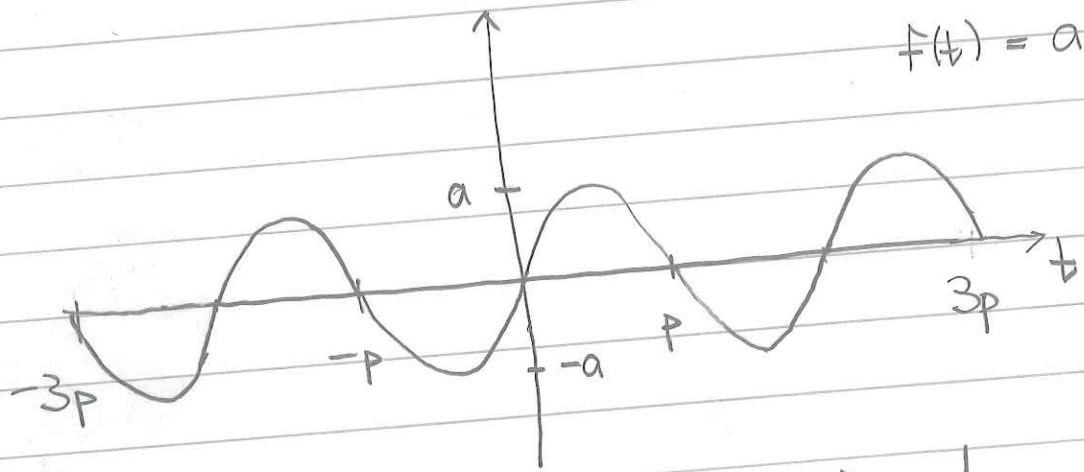
SF1633 Differentialekvationer HT18 . Kurt Johansson

Fourierserier

Enkel harmonisk svängning med frekvensen f:

$a_n \sin 2\pi f t$ eller $b_n \cos 2\pi f t$

$f(t) = a \sin \frac{\pi t}{p}$



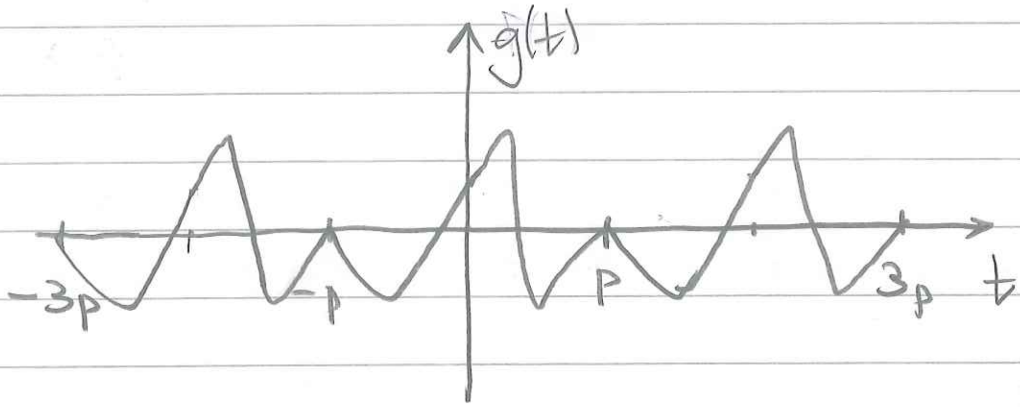
Period $= T = 2p$, Frekvens $f = \frac{1}{T}$

Vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Den grundläggande idén i Fourieranalys är att (i princip) varje periodisk funktion med perioden T kan skrivas som en (oändlig) summa av enkla harmoniska svängningar med frekvenser $f_n = nf = n/T$, $n \geq 0$, som är multiplar av en grundfrekvens f.

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n 2\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n 2\pi}{T} t \right) \quad (1$$

Detta gäller under vissa förutsättningar på f och man måste fundera lite över i vilken mening vi har likhet i (1). Konvergensen av serien är inte självklar.



periodisk svängning/signal

Givet f(t) hur kan vi bestämma a_n och b_n?

De frekvenser $f_n = nf$ som finns med i (1) kallas spektrum för g och vi talar också om frekvensanalys. a_n och b_n anger hur mycket det finns med av varje frekvens.

$$a_n \cos \frac{n 2\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n \cdot 2\pi}{T} t = c_n \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} t + \varphi_n\right)$$

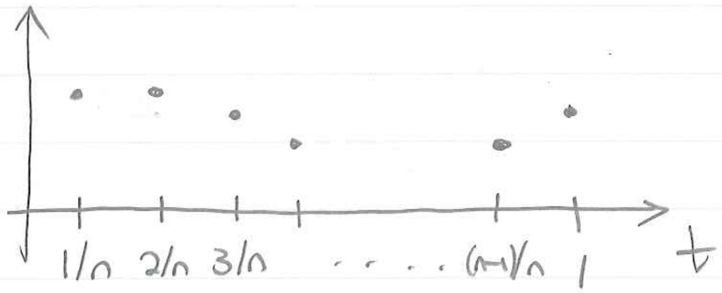
amplitud   fas

(1) kallas en Fourierserie och vi säger att vi utvecklar g i en Fourierserie. Koefficienterna a_n och b_n kallas Fourierkoefficienter.

a_n och b_n kan bestämmas genom att utnyttja ortogonalitet.

Skalärprodukt

Låt x_k vara ett observerat värde av någon variabel vid tiden $t_k = k/n$, $1 \le k \le n$.



Låt y_k vara ett annat observerat värde vid tiden k/n, $1 \le k \le n$. Vi får två vektorer i $\mathbb{R}^n$

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad \overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Antag att x_k och y_k ges av kontinuerliga funktioner

$$x_k = f\left(\frac{k}{n}\right) \quad , \quad y_k = g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Skalärprodukten (eller inre produkten) av $\overline{x}$ och $\overline{y}$ är

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = (\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

Medelvärdet är

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_0^1 f(t) g(t)\, dt .$$

(f, g kont.)

Konvergens av en Riemannsumma.

Vi tar högerledet som definitionen av skalärprodukten eller inre produkten av de två funktionerna på $[0,1]$.

Def. Inre produkten av två funktioner f, g på $[a,b]$ definieras genom

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx .$$

Funktionerna f och g är ortogonala om

$$(f,g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx = 0 .$$

Ex. Polynomen $p_1(x) = x$ och $p_2(x) = 5x^3 - 3x$ är ortogonala på $[-1,1]$.

$$\int_{-1}^{1} x(5x^3 - 3x)\,dx = \int_{-1}^{1} 5x^4 - 3x^2\,dx = \left[x^5 - x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= 1 - 1 - ((-1) - (-1)) = 0 .$$

För en vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ges normen (längden) $\|\bar{x}\|$ av

$$\|\bar{x}\|^2 = \bar{x} \cdot \bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

På samma sätt definierar vi normen $\|f\|$ av funktionen f på $[a,b]$ genom

$$\|f\|^2 = (f,f) = \int_a^b f(x)^2\,dx\,, \quad \|f\| \geq 0.$$

Ex. Normen av $p_1(x) = x$ på $[-1,1]$ fås ur

$$\|p_1\|^2 = \int_{-1}^{1} p_1(x)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\|p_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Def. $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$ är en ortogonal mängd av funktioner på $[a,b]$ om de är parvis ortogonala,

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \quad \text{för alla } m \neq n.$$

Det är en ortonormal mängd om dessutom $\|\varphi_n\| = 1$ för varje $n \geq 0$.

Ex. $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ är en ortogonal mängd på $[-\pi,\pi]$.

$\varphi_n(x) = \cos nx$, $n \geq 0$. Låt $m \neq n$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x + \cos(m-n)x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

ty $\sin k\pi = 0$ för varje $k \in \mathbb{Z}$.

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = \pi$$

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi}\,,\ n \geq 1\,,\quad \|\varphi_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi.$$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots\right\}$ är en ortonormal mängd.

Kommentar: Mängden av alla funktioner $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sådana att

$$\|f\|^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx < \infty$$

bildar ett vektorrum av funktioner på $[a,b]$ som kallas $L^2[a,b]$ ("L^2-rummet"). På detta rum har vi en inre produkt (skalärprodukt) som vi definierat ovan. Avståndet mellan två funktioner f och g definieras genom

$$\|f-g\| = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Detta är ett oändligtdimensionellt vektorrum. Dimensionen n av $\mathbb{R}^n$ är lika med det maximala antalet linjärt oberoende vektorer vi kan ha. I $L^2[-\pi,\pi]$ är $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ en oändlig följd av linjärt oberoende "vektorer".

Om $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$, är en ortogonal följd (mängd) av funktioner på $[a,b]$ är det en intressant fråga om vi kan skriva en given funktion $f(x)$ på $[a,b]$ som en serie (oändlig linjärkombination):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

("expansion i ortogonal bas")

Då är

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\Big)\varphi_m(x)\,dx$$

$$\overset{\text{ej självklart!}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx}_{\substack{=0 \text{ om } n\neq m \\ =\|\varphi_m\|^2 \text{ om } n=m}} = c_m\|\varphi_m\|^2$$

bara termen $n=m$ är $\neq 0$.

Alltså måste vi ha

$$c_m = \frac{1}{\|\varphi_m\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = \frac{(f,\varphi_m)}{\|\varphi_m\|^2}$$

(jfr. ON-bas i linjär algebra)

Fourierserier

$\{1, \cos\frac{\pi x}{p}, \sin\frac{\pi x}{p}, \cos\frac{2\pi x}{p}, \sin\frac{2\pi x}{p}, \ldots\}$ är en

ortogonal mängd på $[-p,p]$. Visas helt analogt med fallet $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$ ovan,

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi x}{p} \cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = 0 \quad \text{om } m \neq n$$

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi x}{p}\,dx = 0 \quad \text{alla } m, n$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi x}{p}\,dx = 0 \quad \text{om } m \neq n$$

Dessutom ges normerna i kvadrat av

$$\int_{-p}^{p} \cos^2\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx = p \; ; \; \int_{-p}^{p} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx = p \; , \; m \geq 1$$

$$\int_{-p}^{p} 1\,dx = 2p$$

Om $f(x)$, $x \in [-p,p]$ ges av den trigonometriska serien

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right) \qquad (1)$$

bör vi alltså ha att

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \quad , n \geq 1 \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx \quad , n \geq 1 \qquad (3)$$

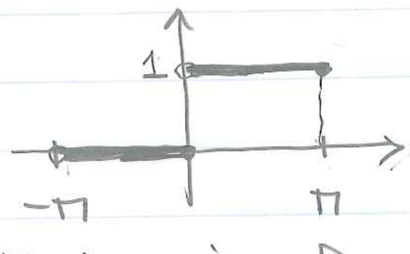
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot 1\,dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \qquad (4)$$

(dvs. (2) med $n=0$; därför skriver vi $a_0/2$ i (1).)

a_n och b_n kallas Fourierkoefficienterna för funktionen f på $[-p,p]$, och (1) kallas Fourierserien för f på $[-p,p]$. I (1) har vi utvecklat/expanderat f i en Fourierserie på intervallet $[-p,p]$.

Ex. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{om } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$



Bestäm Fourierserien för f. $p=\pi$. Om $n \neq 0$ är

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$\underset{n\neq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}(\sin n\pi - \sin 0) = 0.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx \overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\cos n\pi + \cos 0\right] = \frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

Fourierserien blir

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx \overset{?}{=} f(x) \quad , \; x\in[-\pi,\pi]$$

$\boxed{\text{Har vi likhet här?}}$

Om vi inte vet att vi har likhet skriver vi ibland

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$$

Det är inte självklart att vi har likhet och inte alltid sant.

Skriv

$$f(x+) = \lim_{h\to 0+} f(x+h)$$ högergränsvärde i x (om det existerar)

$$f(x-) = \lim_{h\to 0-} f(x+h)$$ vänstergränsvärde i x (om det existerar)

I exemplet är $f(0+) = 1$, $f(0-) = 0$.

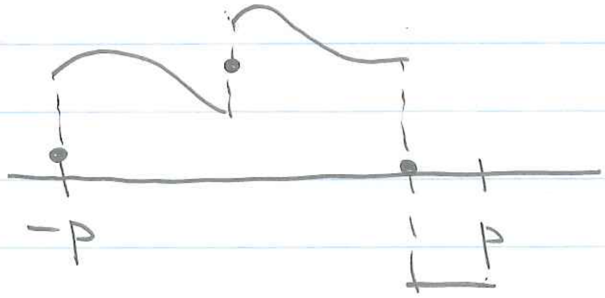
Om f är kontinuerlig i x så är

$$f(x) = f(x+) = f(x-).$$

Sats Om f och f' är styckvis kontinuerliga i $[-p,p]$ så konvergerar Fourierserien mot $f(x)$ om x är en kontinuitetspunkt och mot

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

i en diskontinuitetspunkt.



I exemplet gäller

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}(1-(-1)^n)\sin nx = \begin{cases} 1 & \text{om } 0<x<\pi \\ 1/2 & \text{om } x=0 \\ 0 & \text{om } -\pi<x<0 \\ 1/2 & \text{om } x=\pm\pi \end{cases}$$

Antag att f är definierad i $[-p,p]$ och att

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right), \qquad (5)$$

$x \in [-p,p]$.

Då är högra ledet i (5) en periodisk funktion med period $2p$, ty

$$\cos\frac{n\pi}{p}(x+2p) = \cos\left(\frac{n\pi}{p}x + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

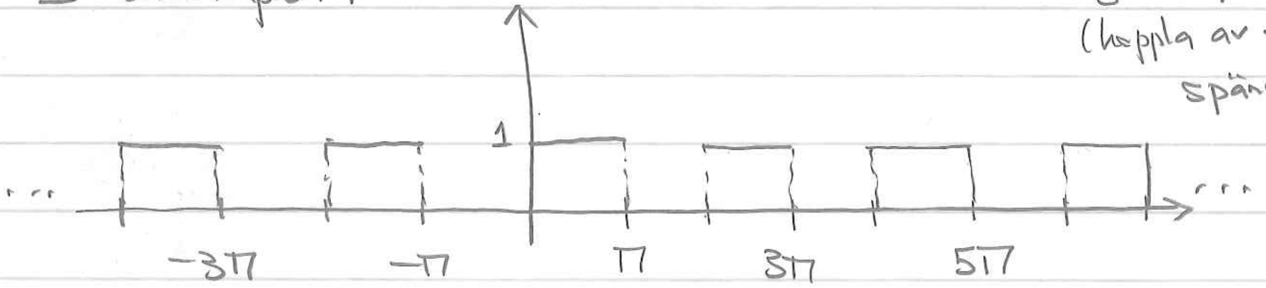
och motsvarande för sinus. Om vi utvidgar f till en periodisk funktion på $\mathbb{R}$ genom att kräva

$$f(x+2p) = f(x), \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}$$

Så gäller (5) för alla $x \in \mathbb{R}$.

I exemplet:

fyrhantpuls (koppla av och på spänning)



Ex. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$p=1$

period $T = 2p = 2$

Bestäm Fourierserien för f. Vi får

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx \underset{\uparrow}{=} 2\int_0^1 (1-x)\cos n\pi x\,dx$$

integranden är
en jämn funktion

partiell integration
↓

$$= 2\left[(1-x)\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-1)\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{2(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}$$

Vi kan observera att $\cos n\pi = (-1)^n$. Alltså

$$a_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}, \quad n \geq 1$$

$$a_0 = 2\int_0^1 1-x\,dx = 2\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1.$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)\sin n\pi x}_{\text{udda funktion}}\,dx = 0, \quad n \geq 1.$$

Då f och f' är styckvis kontinuerliga, och f är kontinuerlig ger satsen att

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x, \quad x \in [-1,1]$$

För $x \in \mathbb{R}$ får vi den periodiska utvidgningen av f

Speciellt kan vi sätta $x = 0$ vilket ger

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}$$

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ jämnt} \\ 2 & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$$

Alla udda tal kan skrivas $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

dvs.

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$