Föreläsning 11

SF1633 Differentialekvationer HT18. Kurt Johansson

Stabilitet för linjära system med konstanta koefficienter

Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Antag att $\det A = ad - bc \neq 0$. Då är $(0,0)$ den enda kritiska punkten till (1). Vi vill avgöra vilken typ av kritisk punkt $(0,0)$ är.

Systemet
$$\begin{cases} x' = a(x-x_0) + b(y-y_0) \\ y' = c(x-x_0) + d(y-y_0) \end{cases} \qquad (2)$$

har (x_0, y_0) som enda kritisk punkt. Samma teori som för (1) förutom att (x_0, y_0) blir som ett nytt origo.

Låt λ_1, λ_2 vara egenvärdena till matrisen A, dvs. rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Vi delar upp i olika fall.

Vi kan ha två olika reella egenvärden, en reell dubbelrot eller två icke-reella egenvärden.

1) Två olika reella egenvärden

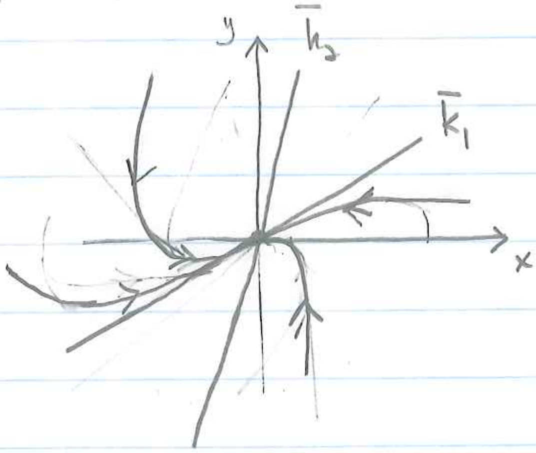
λ_1 egenvärde med egenvektor $\bar{k}_1$

λ_2 egenvärde med egenvektor $\bar{k}_2$

Lösning:

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

a) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ båda negativa

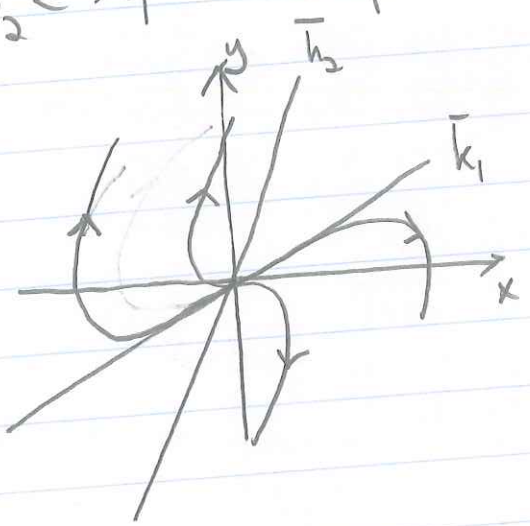


$\bar{k}_2$-komponenten går fortare mot noll än $\bar{k}_1$-komponenten

stabil nod

(0,0) attraktiv jämviktspunkt

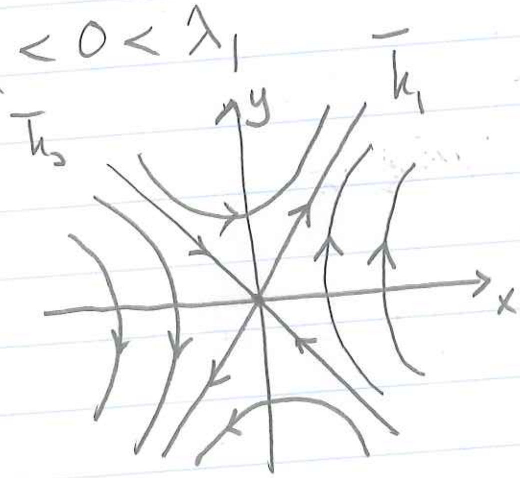
b) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ båda positiva



instabil nod

(0,0) repellerande jämviktspunkt

c) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$



Sadelpunkt

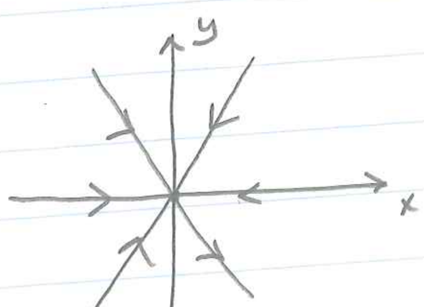
instabil jämviktspunkt

2) Dubbelt egenvärde $\lambda_1 = \lambda_2$

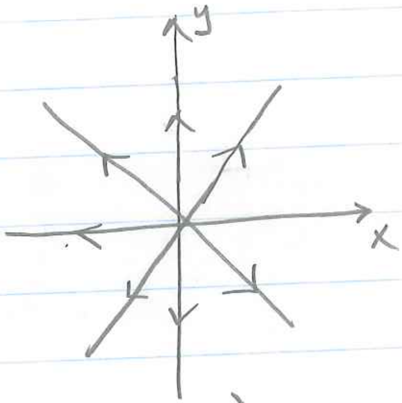
a) Två linjärt oberoende egenvärden (egenrummet dim = 2)

$$\bar{X}(t) = (c_1 \bar{k}_1 + c_2 \bar{k}_2) e^{\lambda_1 t}$$

$\lambda_1 < 0$: degenererad stabil nod



$\lambda_1 > 0$: degenererad instabil nod

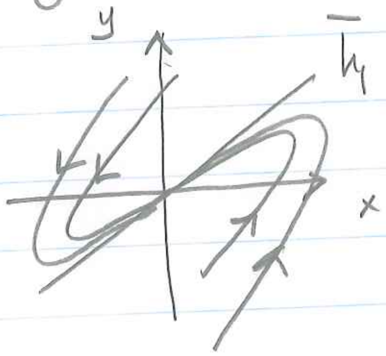


($\lambda_1 = 0$, HL i (1) är 0, bara konstanta lösningar.)

b) Bara en egenvektor (egenrummets dimension = 1)

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{h}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2(\bar{h}_1 t + \bar{p})e^{\lambda_1 t}$$
$$= (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t}\bar{k}_1 + c_2 \bar{p} e^{\lambda_1 t}$$

$\lambda_1 < 0$: degenererad stabil nod



$\lambda_1 > 0$: degenererad instabil nod, vänd på pilarna.

3) Icke-reella egenvärden.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0$$

Lösningarna har formen

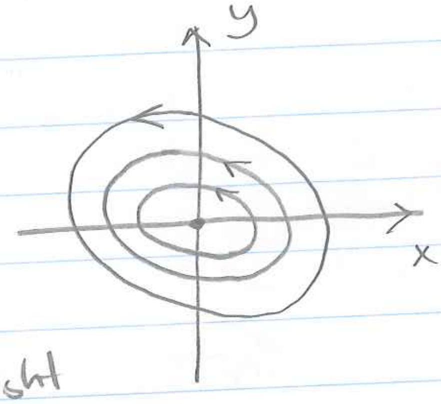
$$x(t) = e^{\alpha t}\underbrace{(c_{11}\cos\beta t + c_{12}\sin\beta t)}^{\text{periodisk med period } \frac{2\pi}{\beta}}$$

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_{21}\cos\beta t + c_{22}\sin\beta t)$$

a) $\alpha = 0$, rent imaginära rötter

Periodiska banor

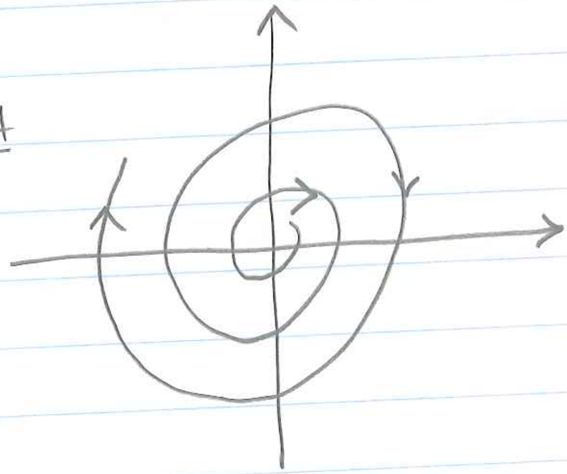
ellipser



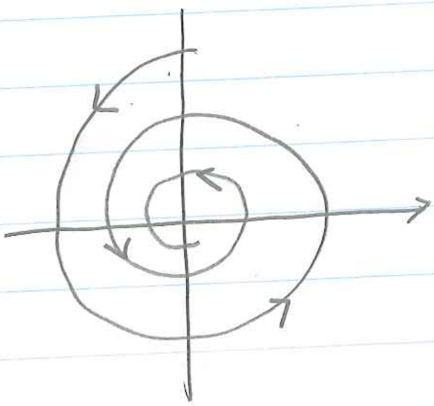
(0,0) ett centrum

stabil men ej asymptotiskt stabil jämviktspunkt

b) $\alpha > 0$ instabil spiralpunkt



c) $\alpha < 0$ stabil spiralpunkt



Ex. $\begin{cases} x' = -5x+3y \\ y' = 2x-7y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

Vilken typ av kritisk punkt är $(0,0)$?

Egenvärden: $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-7-\lambda)-6$

$= \lambda^2 + 12\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \pm \sqrt{7}$

Två olika reella egenvärden båda <0 : stabil nod

Ex. $\begin{cases} x' = -5x+3y \\ y' = -7x+4y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

Vilken typ av kritisk punkt är $(0,0)$?

Egenvärden: $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -7 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \alpha \pm i\beta$

$\alpha < 0$, . Stabil spiralpunkt.

Linjarisering, lokal analys av stabilitet

Betrakta ett icke-linjärt system av första ordningen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \qquad (2)$$

(x_0,y_0) kritisk punkt, $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$. Om (x,y) är nära (x_0,y_0) gäller approximativt (antag P,Q C^1)

$$P(x,y) \approx \underbrace{P(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$Q(x,y) \approx \underbrace{Q(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Vi kan approximera (2) för (x,y) nära (x_0,y_0) med

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases} \qquad (3)$$

Det linjariserade systemet kring (x_0,y_0) har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

A har egenvärden λ_1, λ_2

<u>Sats</u>. a) Om $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ eller $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0, \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$ så är (x_0, y_0) en asymptotiskt stabil kritisk punkt

b) Om något egenvärde är > 0 eller har positiv realdel är (x_0, y_0) en instabil kritisk punkt.

<u>Ex.</u> Klassificera (om möjligt) de kritiska punkterna till

$$\begin{cases} x' = xy - 3y - 4 & = P(x,y) \\ y' = y^2 - x^2 & = Q(x,y) \end{cases}$$

Bestäm kritiska punkter $y^2 - x^2 = 0$ ger $y = \pm x$.

$y = x$ i första ekv. ger $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 4$

$(-1,-1)$, $(4,4)$ kritiska punkter

$y = -x$ i första ekv. ger $-x^2 + 3x - 4 = 0$ som saknar reella rötter; x, y är reella tal.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x - 3$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y$$

- $(-1,-1)$ ger matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+3\lambda+10=0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-10} = -\frac{3}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{31}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda = -\frac{3}{2} < 0$$

stabil spiralpunkt

- $(4,4)$ ger matrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -8 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 40 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 6 \pm \sqrt{36-40} = 6 \pm 2i, \quad \mathrm{Re}\,\lambda = 6 > 0$$

instabil spiralpunkt

Ex. Ekvationen

$$x'' + x - x^3 = 0 \qquad \text{(icke-linjär svängning)}$$

kan skrivas

$$\begin{cases} x' = y & = P(x,y) \\ y' = -x + x^3 & = Q(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \text{ fasplanet}$$

a) Klassificera kritiska punkter.

$-x+x^3=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\pm 1$

$(0,0)$, $(-1,0)$ och $(1,0)$ kritiska punkter

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2-1,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=0$$

$$(0,0):\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm i$$

Eftersom realdelen $=0$ kan vi inte avgöra typen av kritisk punkt genom linjärisering. Skulle kunna vara ett centrum.

$$(\pm 1,0):\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};\quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-2=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}$$

$(1,0)$ och $(-1,0)$ är sadelpunkter.

b) Studera lösningarna nära $(0,0)$. Centrum?

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+x^3 \end{cases}$$

$t \to (x(t), y(t))$ lösningskurva.

Antag att lösningskurvan i ett visst område ges av en funktion $y=y(x)$. Då är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x^3-x}{y}$$ ("<u>fasplansmetoden</u>")

↑
riktningskoefficient

Separabel ekvation.

$$\int y\,dy = \int x^3 - x\,dx + c_1$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c_1$$

Vi ser att lösningskurvan bör vara en del av nivåkurvan

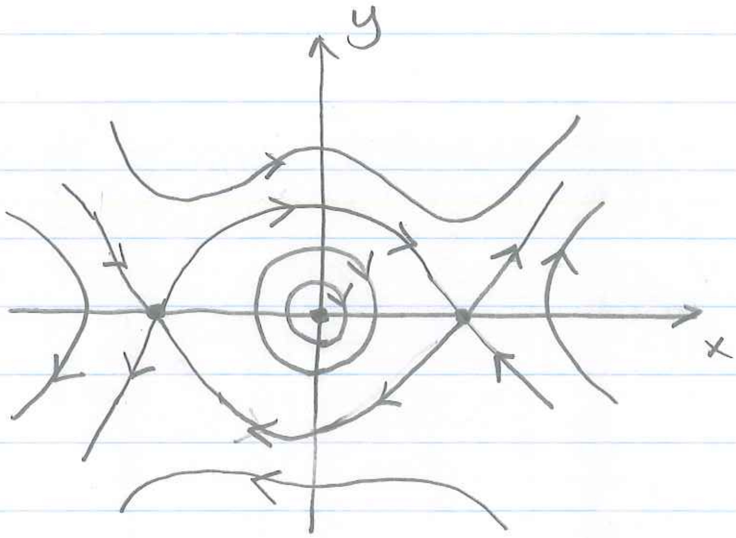
$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} = c_1$$ (fysikalisk tolkning: <u>energin konstant</u>)

$$E(x,y) = E(\underbrace{x_0, 0}_{\text{startpunkt}})$$ sluten kurva om x_0 liten (se nedan eller ex. 9, s. 407 i boken.)

Att $E(x,y)$ är konstant på lösningskurvan kan vi se genom följande räkning

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (-x^3+x)y + y(x^3-x) = 0.$$



Fasporträtt

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c_1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^2) + 2c_1$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}(x^2-1)^2 + 2c_1 - \frac{1}{2} \qquad , c_2 = 2c_1 - \frac{1}{2}$$

Om vi startar i $(x_0, 0)$, x_0 litet, får vi

$$0 = \frac{1}{2}(x_0^2-1)^2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{2}(x_0^2-1)^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(x^2-1)^2 - \frac{1}{2}(x_0^2-1)^2 \underset{\uparrow}{=} \frac{(x^2-1-(x_0^2-1))(x^2-1+x_0^2-1)}{2}$$

konjugatregeln

$$y^2 = \frac{(x^2-x_0^2)(x^2+x_0^2-2)}{2} \qquad (*)$$

Om $x_0>0$ är nära 0 och $0<x<x_0$ är högra ledet i (*) >0 och vi får två y-värden.
Analogt om $-x_0<x<0$ (symmetri).
Kurvan ser ut som på bilden.