Föreläsning 10

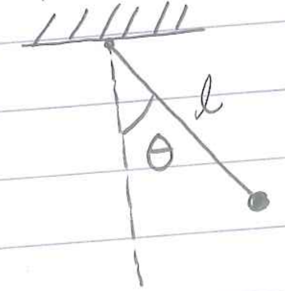
SF1633 Differentialekvationer HT18, Kurt Johansson

Ett första ordningens autonomt system med två obekanta har formen

$$\begin{cases} x_1' = P(x_1, x_2) \\ x_2' = Q(x_1, x_2) \end{cases}$$

Högerledet beror ej explicit på t. Allt beroende på t sitter i $x_1 = x_1(t)$ och $x_2 = x_2(t)$.

Ex. En pendel satisfierar ekvationen



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

där g är tyngdaccelerationen, vilket följer från Newtons andra lag. Sätt

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \frac{d\theta}{dt}.$$

Vi får motsvarande första ordningens system

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin x_1, \end{cases}$$

som är autonomt och icke-linjärt.

Ex $\frac{dx_1}{dt} = x_2$

ické-autonomt

$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 + a\cos\omega t$

drivande kraft, yttre påverkan

Autonomt system av storlek n:

$$\begin{cases} x_1' = g_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ x_n' = g_n(x_1,\dots,x_n) \end{cases}, \quad t \in I$$

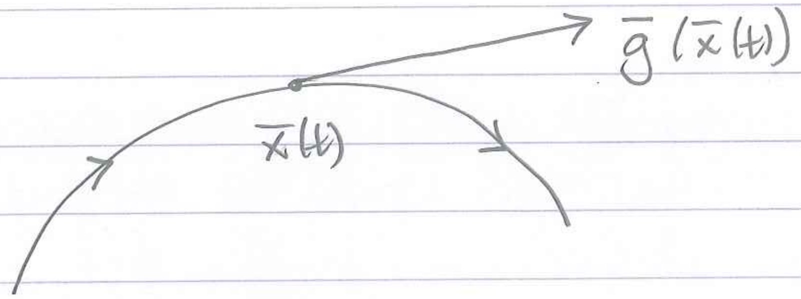
$\bar{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\bar{g}(\bar{x}) = (g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_n(x_1,\dots,x_n))$

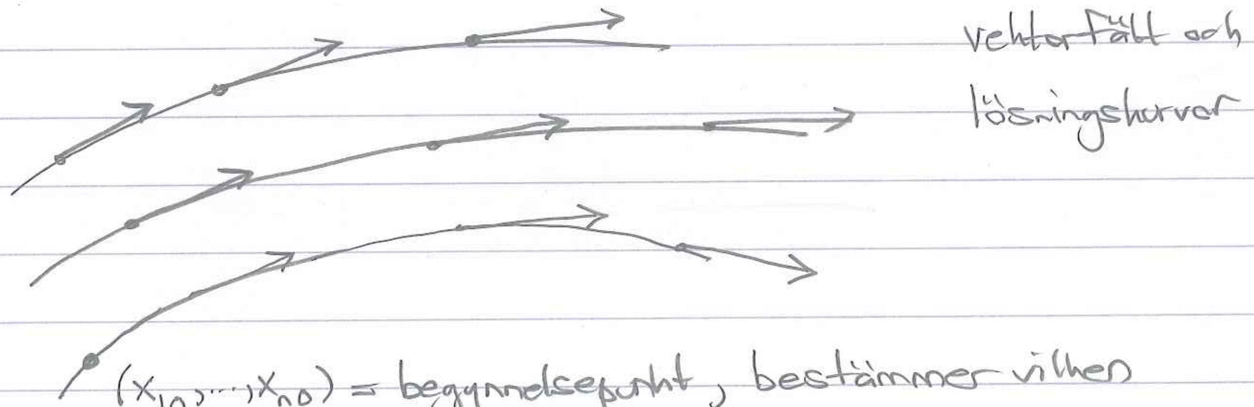
$\bar{g}$ är ett vektorfält. I varje punkt $\bar{x}$ har vi en vektor $\bar{g}(\bar{x})$. Denna vektor ger <u>hastighetsvektorn</u> $\bar{x}'$ i punkten $\bar{x}$:

$\bar{x}'(t) = \bar{g}(x(t))$. (hastighets- eller <u>tangentvektorn</u>)

Tänk på $t \to \bar{x}(t)$, $t \in I$ som en kurva i $\mathbb{R}^n$, <u>lösningskurvan</u> (eller <u>banan</u>).



Eftersom systemet är autonomt beror vektorfältet $\bar{x} \to \bar{g}(\bar{x})$ ej på t.



$(x_{10}, \dots, x_{n0})$ = begynnelsepunkt, bestämmer vilken lösningskurva vi följer

Ofta kallas $\bar{x}' = \bar{g}(\bar{x})$ för ett <u>dynamiskt system</u>, $\bar{x}(t)$ är systemets <u>tillstånd</u> (eng. <u>state</u>) vid tiden t och det dynamiska systemet beskriver hur tillståndet utvecklas i tiden.

Kritiska punkter

Betrakta ett system med två okända funktioner $x(t)$ och $y(t)$,

$$\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

Om $x(t) = a$, $y(t) = b$ är en konstant lösning till (1) för $t \in I$ så är $x'(t) = 0$ och $y'(t) = 0$ varför (1) ger

$$\begin{cases} P(a,b) = 0 \\ Q(a,b) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

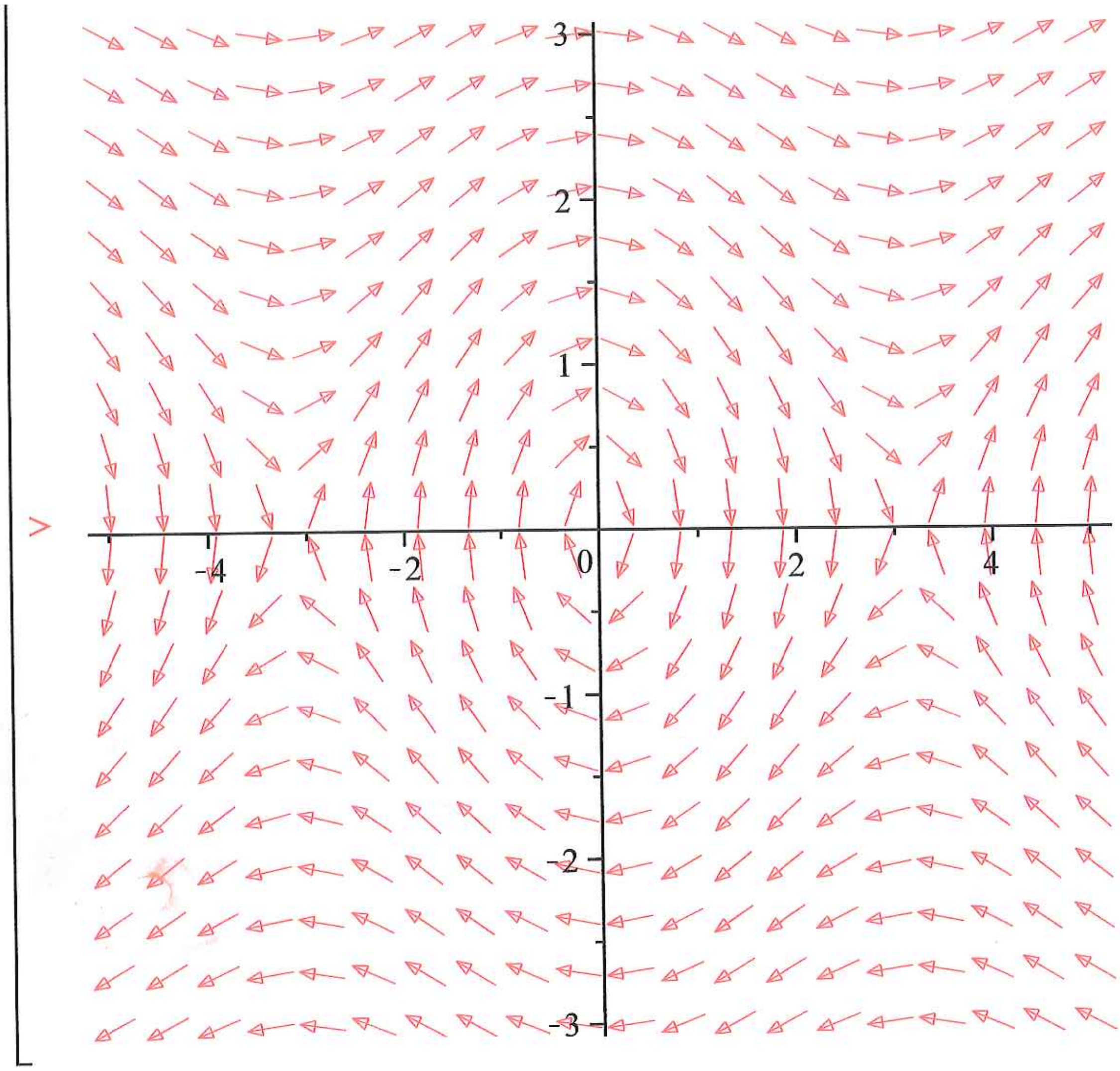
En punkt (a,b) för vilket (2) gäller kallas en <u>kritisk punkt</u>, en <u>jämviktspunkt</u>, en <u>stationär punkt</u> eller en <u>fixpunkt</u>. Vektorfältet är alltså $= 0$ i en kritisk punkt.

<u>Ex.</u> Pendeln

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{g}{l}\sin x_1 \end{cases}$$

$P(x_1,x_2) = x_2 = 0$, $Q(x_1,x_2) = -\frac{g}{l}\sin x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Kritiska punkter: $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.



Vektorfält för pendeln.

(0,0)
stabil kritish punkt

(0,π)
instabil kritich punkt

Ex. Bestäm alla kritiska punkter till

$$\begin{cases} x' = y^2 - x \\ y' = x^2 - y. \end{cases}$$

Vi får $\begin{cases} y^2 - x = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

$x = y^2 \Rightarrow x^2 = y^4$. Alltså $y^4 - y = 0 \Leftrightarrow y(y^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ eller $y = 1$ (reella lösningar)

$y = 0$ ger $x = 0$, $y = 1$ ger $x = 1$

Svar: Kritiska punkter: $(0,0)$, $(1,1)$.

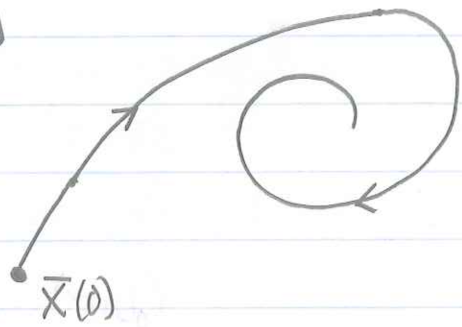
Sats. Om P och Q är C^1 i en öppen mängd D i $\mathbb{R}^2$ och $(x_0, y_0) \in D$ så har begynnelsevärdesproblemet

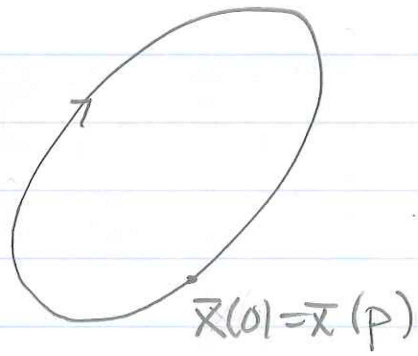
$$\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}, \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

en entydig lösning nära (x_0, y_0).

Lösningskurvor kan inte skära sig själva, eller andra lösningskurvor. Lösningskurvor kan bara mötas i kritiska punkter. I själva kritiska punkten är "lösningskurvan" en enda punkt.

$\bar{X} = (x, y)$





periodisk lösning

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

(0,0) enda kritiska punkt.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x(x^2+y^2)^2 \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = x - y(x^2+y^2)^2 \end{cases}, \quad \bar{X}(0) = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$$

genom att övergå till polära koordinater. Beskriv lösningskurvan.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta; \quad r^2 = x^2+y^2, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Kedjeregeln ger:
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right)$$

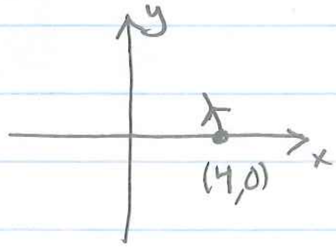
Alltså

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x(-y - x(x^2+y^2)^2) + y(x - y(x^2+y^2)^2)\right)$$

$$= \frac{1}{r}(-xy - x^2r^4 + yx - y^2r^4) = -\frac{1}{r}(x^2+y^2)r^4 = -r^5$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y(-y-xr^4)+x(x-yr^4)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(x^2+y^2\right) = 1$$



Vi får i polära koordinater

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -r^5 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases} \qquad r(0) = r_0,\ \theta(0) = \theta_0$$

$$\frac{dr}{dt} = -r^5 \Leftrightarrow -\frac{1}{r^5}dr = dt \Leftrightarrow \frac{1}{4r^4} = t + c_1$$

$$\Leftrightarrow r^4 = \frac{1}{4(t+c_1)} \Leftrightarrow r = \frac{1}{(t+c_1)^{1/4}\sqrt{2}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 \Leftrightarrow \theta = t + c_2$$

$$(r,\theta) = \left(\frac{1}{(t+c_1)^{1/4}\sqrt{2}},\ t+c_2\right)$$

$$(r(0),\theta(0)) = \left(\frac{1}{c_1^{1/4}\sqrt{2}},\ c_2\right) = (r_0, \theta_0) \quad ; \ c_2 = \theta_0$$

$$r_0 = \frac{1}{c_1^{1/4}\sqrt{2}} \Leftrightarrow c_1^{1/4} = \frac{1}{r_0\sqrt{2}} \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{4r_0^4}$$

$$r = \frac{1}{(t+c_1)^{1/4}\sqrt{2}} = \frac{1}{(t_1 + 1/4r_0^4)^{1/4}\sqrt{2}}$$

Lösning: $r = \dfrac{1}{(t_1+1/4r_0^4)^{1/4}\sqrt{2}}$, $\theta = t+\theta_0$. Spiral mot origo.

Låt $\bar{a} = (a_1, a_2)$ vara en kritisk punkt till ett plant autonomt system

$$\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}, \qquad (1)$$

dvs. $P(a_1,a_2) = Q(a_1,a_2) = 0$. Låt $\bar{x}(t) = (x(t), y(t))$ vara en lösning till (1) med begynnelsevillkoret $\bar{x}(0) = \bar{b} \neq \bar{a}$.

- $\bar{a}$ är en <u>stabil kritisk punkt</u> om för varje $\rho > 0$ det finns ett $r > 0$ så att om $|\bar{b} - \bar{a}| < r$ så gäller $|\bar{x}(t) - \bar{a}| < \rho$ för alla $t \geq 0$.

Om vi startar i den inre cirkeln håller vi oss alltid inom den yttre cirkeln.

$\bar{a}$ är en <u>asymptotiskt stabil kritisk punkt</u> om det dessutom gäller att

$$\lim_{t \to \infty} \bar{x}(t) = \bar{a}$$

- Om det existerar ett $\rho > 0$ så att oavsett hur litet vi väljer r det alltid finns ett $\bar{b}$ så att $|\bar{b} - \bar{a}| < r$ och ett $t > 0$ så att $|\bar{x}(t) - \bar{a}| \geq \rho$, så är $\bar{a}$ en <u>instabil kritisk punkt</u>.

Ex. I föregående exempel

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2+y^2)^2 \\ y' = x - y(x^2+y^2)^2 \end{cases}$$

är $(0,0)$ en kritisk punkt. Från lösningen i polär form

$$r(t) = \frac{1}{(t+\frac{1}{4r_0^2})^{1/4}\sqrt{2}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0,$$

ser vi att

$$r(t) \to 0 \quad \text{då} \quad t \to \infty.$$

Var vi än startar så konvergerar vi mot origo varför origo är en asymptotiskt stabil kritisk punkt.

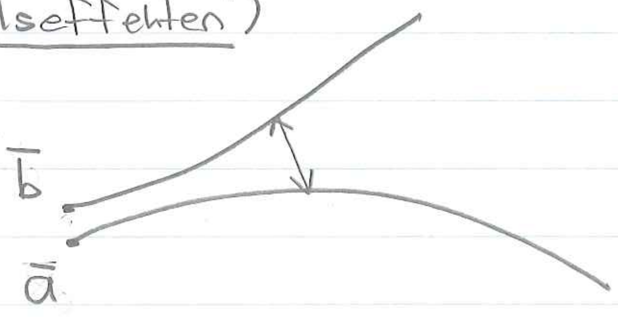
Lorenz ekvation

Mycket förenklad ekvation relaterad till konvektions-strömmar i meterologi.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma x - \sigma y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \rho x - y - xz \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = -\beta z + xy \end{cases}$$

$\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$

Dynamiken är mycket komplicerad. Vi får en komplicerad attraktor ("strange attractor") med en kaotisk dynamik.
Kaotisk dynamik innebär att vi har ett mycket känsligt beroende av begynnelsedata, närliggande punkter separerar snabbt (exponentiellt) ("fjärilseffekten")



(Titta på "Lorenz system" i engelska Wikipedia)

$\bar{x} \doteq (x,y,z)$,

$\bar{x}(0)=\bar{a}$, $\bar{x}(0)=\bar{b}$

12