

Tentamen SF1692, Analytiska och numeriska metoder för ordinära differentialekvationer, den 28 oktober 2021 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. Betrakta systemet

$$\bar{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \bar{x}(t). \quad (1)$$

Finn alla kritiska punkter och klassificera dessa med avseende på stabilitet.

Det karakteristiska polynomet $\lambda^2 - 10\lambda$ har rötterna $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 10$. Motsvarande egenvektorer ges (t.ex) av $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen ges således av

$$c_1 v_1 + c_2 e^{10t} v_2,$$

och alla punkter på linjen som spänns upp av v_1 är kritiska.

Given en kritisk punkt $d_1 v_1$ kan vi hitta $x_0 = d_1 v_1 + \epsilon v_2$ som ligger godtyckligt nära $d_1 v_1$ (tag $\epsilon > 0$ godtyckligt litet) så att lösningen $x(t)$, till ekvationen som satisfierar begynnelsevillkoret $x(0) = x_0$, har egenskapen att $|x(t)| \rightarrow \infty$ då $t \rightarrow \infty$. Således är alla kritiska punkter på linjen instabila.

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$xy' + y = x^4 y^3, \quad y(1) = 1$$

(glöm inte att ange existensintervallet.) Ledtråd: använd substitution.

Vi sätter $z = y^{1-n} = y^{-2}$ (Bernoulliekvation med $n = 3$) och får $dz/dx = -2y^{-3} dy/dx$ som ger

$$x(-y^3/2)z' + y = x^4 y^3$$

som ger ($x > 0$) den linjära ekvationen

$$z' - 2z/x = -2x^3$$

med integrerande faktor $1/x^2$, multiplikation med denna ger ekvationen

$$(z/x^2)' = -2x$$

och vi får $z = x^2(C - x^2)$ och $y = (Cx^2 - x^4)^{-1/2}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ ger $C = 2$, och vi får lösningen

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x^4}}$$

på intervallet $I = (0, \sqrt{2})$.

3. Ekvationen

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (2)$$

har en lösning på formen $y(x) = ax + b$ där a, b är konstanter.

(a) (1p) Finn en icke-trivial lösning till ekvation (2).

(b) (3p) Bestäm den allmänna lösningen till ekvation (2).

a: Insättning av $y = ax + b$ i ekvationen ger $-2xa + 2(ax + b) = 0$. Vi ser att $b = 0$ och att a kan väljas godtyckligt, t.ex. $a = 1$; åledes ger $y(x) = x$ en icke-trivial lösning.

b: Vi använder reduktion av ordning och antar $y = u \cdot x$ som efter insättning i ekvationen ger

$$(1 - x^2)(xu'' + 2u') - 2x(u + xu') + 2xu = u''x(1 - x^2) + u'(2 - 4x^2) = 0$$

Om vi låter $v = u'$ får vi den första ordningens ekvation

$$v' + \frac{2 - 4x^2}{x(1 - x^2)}v = 0$$

som, om vi använder oss av partialbråksuppdelningen,

$$\frac{2 - 4x^2}{x(1 - x^2)} = 2/x - \frac{2x}{1 - x^2}$$

ger att

$$\ln v = -(2 \ln x + \ln(1 - x^2)) + d_1$$

som ger $v = \frac{D}{x^2(1-x^2)}$. Partialbråksuppdelningen $\frac{1}{x^2(1-x^2)} = (1/(2x^2) + (1/(1-x) + 1/(1+x))/4$ samt integrering ger

$$u = D(-1/(2x) - \ln(1-x)/4 + \ln(1+x)/4) + E$$

och vi finner att den allmänna lösningen ges av

$$y = ux = D(-1/2 + x \ln(\frac{1+x}{1-x})/4) + Ex.$$

4. (4p) Betrakta ekvationen

$$y''(t) + 4y(t) = A \cdot \delta(t - t_0), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

där A och t_0 är konstanter. Bestäm A samt det minsta $t_0 > 0$ så att lösningen till ekvationen uppfyller $y(t) = 0$ för alla $t > 10$.

Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) - 1 + 4Y(s) = A \cdot e^{-st_0}$$

som ger

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4}(1 + Ae^{-st_0})$$

varpå inverstransform ger

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{2} u(t - t_0) A \sin(2(t - t_0))$$

som, för $t > t_0$, ger

$$\sin(2t) = -A \sin(2t - 2t_0).$$

Eftersom $\sin(2t) = 1$ för oändligt många godtyckligt stora t ser vi att $|A| \geq 1$, och då samma gäller för $\sin(2t - 2t_0)$ får vi $|A| \leq 1$, dvs $A = \pm 1$. $A = 1$ ger att $\sin(2t) = -\sin(2t - 2t_0)$, dvs $2t_0 = \pi(1 + 2n)$ för heltal $n \geq 0$ och det minsta t_0 för $A = 1$ är $\pi/2$. För $A = -1$ får vi $\sin(2t) = \sin(2t - 2t_0)$ som ger $2t_0 = 2\pi + 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$ och det minsta $t_0 > 0$ blir π . Således bör vi välja $A = 1$ och $t_0 = \pi/2$.

5. (4p) Betrakta ekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Genom att låta $y(t) = x'(t)$ kan ekvationen skrivas som ett system, och detta system har en kritisk punkt. Finn den kritiska punkten och använd Lyapunovs metod för att visa att systemet är stabilt. Ledtråd: ekvationen $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$ kan tolkas som rörelseekvationen för en massa $m > 0$ som hängs upp i en fjäder, med fjäderkonstant $k > 0$, med en dämpningskraft $c \frac{dx}{dt}$ (där $c \geq 0$). Prova att använda den totala energin (dvs rörelse + potential) i systemet som Lyapunovfunktion.

Vi får systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y \end{cases}$$

vars kritiska punkt ges av $x = y = 0$.

Om vi låter $E(t) = x^2(t) + y^2(t)$ får vi

$$\frac{dE}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2xy + 2y(-x - y) = -2y^2 \leq 0$$

Då den kvadratiske formen $x^2 + y^2$ är (strikt) positivt definit, och $dE/dt \leq 0$ ger Lyapunovsatsen att systemet är stabilt.

6. (4p) Låt $y_1(t), y_2(t)$ vara två lösningar till ekvationen

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = 0$$

där P, Q är kontinuerliga funktioner på ett intervall I . Bilda Wronskianen $W(t) = W(y_1, y_2)$, och låt $t_0 \in I$. Visa att $W(t) \neq 0$ för alla $t \in I$ om och endast om $W(t_0) \neq 0$.

Då $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ får vi

$$\frac{dW}{dt} = y_1' y_2' y_1 y_2'' - y_2' y_1' y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

som, om vi utnyttjar att y_1, y_2 är lösningar ger

$$\frac{dW}{dt} = y_1(-P y_2' - Q y_2) - y_2(-P y_1' - Q y_1) - P(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -PW$$

dvs W satisfierar den linjära ekvationen $W' = -PW$ som har lösningen $W(t) = C \cdot e^{-\int_{t_0}^t P(t)dt}$.

Eftersom $e^{-\int_{t_0}^t P(t)dt} > 0$ för alla $t \in I$ ser vi att $W(t_0) = 0$ om och endast om $W(t) = 0$ för all $t \in I$.

7. (4p) Låt F vara en funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ med egenskapen att $|F(x_1) - F(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$ för alla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, där $0 < C < 1$. Visa att F har en unik fixpunkt, dvs det finns precis en punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ så att $F(x_0) = x_0$. Ledtråd: Beviset av Picards sats.
-

Välj godtycklig $x_1 \in \mathbb{R}^2$ och definiera $x_{i+1} = F(x_i)$.

Vi noterar att

$$x_n = x_1 + \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1})$$

samt att $|x_k - x_{k-1}| \leq C|x_{k-1} - x_{k-2}|$; det senare ger att $|x_k - x_{k-1}| \leq C^{k-2}|x_2 - x_1|$ för alla $k \geq 2$. Serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} (x_k - x_{k-1})$$

är således absolutkonvergent, och vi ser att gränsvärdet $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existerar. Om vi låter $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ser vi att

$$\begin{aligned} |F(x_0) - x_0| &= |F(x_0) - F(x_n) + F(x_n) - x_n + x_n - x_0| \\ &\leq |F(x_0) - F(x_n)| + |F(x_n) - x_n| + |x_n - x_0| \\ &\leq C|x_0 - x_n| + |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_0| \\ &\leq |x_0 - x_n| + C^{n-2}|x_2 - x_1| + |x_n - x_0| \end{aligned}$$

Givet $\epsilon > 0$ kan vi genom att välja n tillräckligt stort se till att $|x_0 - x_n| \leq \epsilon$, $C^{n-2}|x_2 - x_1| \leq \epsilon$ samt att $|x_n - x_0| \leq \epsilon$ som ger att $|F(x_0) - x_0| \leq 3\epsilon$. Eftersom $\epsilon > 0$ kan väljas godtyckligt litet får vi $|F(x_0) - x_0| = 0$, dvs $F(x_0) = x_0$ och vi har visat att en fix punkt existerar.

Entydighet kan visas så här: antag att x_0 och x'_0 båda är fixpunkter; vi får då $|x_0 - x'_0| = |F(x_0) - F(x'_0)| \leq C|x_0 - x'_0| < |x_0 - x'_0|$ som ger att $x_0 = x'_0$.
