

Tentamen SF1692, Analytiska och numeriska metoder för ordinära differentialekvationer, den 16 december kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y''' - 3y'' + 2y' = 10 + 42e^{3x}$$

och verifiera ditt svar. Notera att felaktigt svar ger noll poäng.

Sätt $z = y'$; vi får då ekvationen $z'' - 3z' + 2z = 10 + 42e^{3x}$, och det motsvarande karakteristiska polynomet $r^2 - 3r + 2$ har rötterna $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ och den homogena lösningen ges av $z_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$. För att hitta en partikulärlösning gör vi ansatsen $z_p = a + be^{3x}$, och insättning i ekvationen ger

$$z_p'' - 3z_p' + 2z_p = 9be^{3x} - 3(3be^{3x}) + 2a + 2be^{3x} = 10 + 42e^{3x}$$

vilket ger $a = 5$ samt $b = 21$. Vi ser nu att $y' = z$ ger

$$y = c_1 e^x + c_2/2 e^{2x} + 5x + 7e^{3x} + c_3$$

-
2. (4p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0.$$

Bestäm alla $\vec{x}_0$ så att $|\vec{x}(t)| \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$.

Det karakteristiska polynomet $p_A(\lambda)$ är lika med $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ och vi ser att $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -2$ är egenvärden till A , och räkning ger att motsvarande egenvektorer v_1, v_2 ges (tex) av $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen

är alltså på formen $x(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^{-2t} v_2$. Med $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ser vi att $|x(t)| \rightarrow 0$ implicerar att $\langle x(t), w \rangle = c_1 e^t \rightarrow 0$; således måste $c_1 = 0$ om $|x(t)| \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$. Om $x_0 = c_2 v_2$ och $x(0) = x_0$ ser vi att $|x(t)| = |c_2 e^{-2t} v_2| \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$. Svar: $x_0 = c v_2$ där $c \in \mathbb{R}$ är en godtycklig konstant.

-
3. (4p) Bestäm, medelst *definitionen av Laplacetransformen*, $\mathcal{L}(e^{3t} \cos t)$ och verifiera ditt svar. Notera att felaktigt svar ger noll poäng.

Då $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ ser vi (med hjälp av integrationstabellen) att, för $s > 3$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{3t} \cos t) &= \int_0^\infty e^{(3-s)t} \cos t dt = \left[\frac{1}{1 + (3-s)^2} e^{(3-s)t} (\sin t + (3-s) \cos t) \right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{1 + (3-s)^2} \cdot (3-s) = \frac{s-3}{1 + (s-3)^2}. \end{aligned}$$

-
4. (4p) Betrakta ekvationen $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$. Visa, med Lyapunovs direkta metod, att nollvektorn är en asymptotiskt stabil kritisk punkt.
-

Med $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ får vi systemet

$$\begin{cases} x' &= F(x, y) = -x + y \\ y' &= G(x, y) = -y \end{cases}$$

Vi ansätter $E = x^2 + bxy + cy^2$ och söker b, c så att E är positivt definit, samt att

$$\frac{\partial E}{\partial x} F + \frac{\partial E}{\partial y} G \tag{1}$$

är negativt definit. Vi ser att (1) är lika med

$$(2x + by)(-x + y) + (bx + 2cy)(-y) = -2x^2 + 2xy - bxy + by^2 - bxy - 2cy^2;$$

och om vi tar $b = 1$ och $c = 1$ är (1) lika med

$$-2x^2 - y^2$$

som uppenbarligen är negativt definit. Vi ser även att $E = x^2 + xy + y^2$ är positivt definit mha diskriminantkriteriet för kvadratiska former då $b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$ (tag $a = 1, b = 1, c = 1$).

5. (4p) Ekvationen $y'' + ay' + by = 0$, av ordning två, svarar mot det karakteristiska polynomet $f(r) = r^2 + ar + b$. Antag att $f(r) = (r - \mu_1)(r - \mu_2)$ där $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ och $\mu_1 \neq \mu_2$. Visa först att ekvationen kan skrivas om som ett system på formen

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

där A är en 2×2 -matris, och visa sedan att $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ är lika med $f(\lambda)$.

Med $z = y'$ kan ekvationen $y'' + ay' + by = 0$ skrivas som systemet

$$\begin{cases} y' &= z \\ z' &= y'' = -(az + by) \end{cases}$$

som, om vi låter $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ och $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, kan skrivas på formen

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Då $\det(A) = b$ och $\text{trace}(A) = -a$ får vi $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{trace}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 + a\lambda + b = f(\lambda)$.

-
6. (4p) Låt $y_1(t), y_2(t)$ vara två lösningar till ekvationen

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = 0$$

där P, Q är kontinuerliga funktioner på ett intervall I . Bilda Wronskianen $W(t) = W(y_1, y_2)$, och låt $t_0 \in I$. Visa att $W(t) \neq 0$ för alla $t \in I$ om och endast om $W(t_0) \neq 0$.

Se bok.

7. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x' &= y^3, & x(0) = 1 \\ y' &= x^3, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Vi använder fasplanmetoden och får ekvationen $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^3}$; omskrivning ger $y^3 dy = x^3 dx$ varpå integration ger $y^4/4 = x^4/4 + C$; initialvillkoret $x(0) = y(0) = 1$ ger $C = 0$ samt att $x(t) = y(t)$ för alla t i något intervall innehållande 0. Om vi ansätter $x(t) = y(t) = f(t)$ för någon funktion f får vi den separabla ekvationen $f' = f^3$; omskrivning $df/f^3 = dt$ samt integration ger $-1/(2f^2) = t + c$, dvs $f^2 = \frac{-1}{2(t+c)}$. Initialvillkoret $f(0) = 1$ ger $c = -1/2$, och vi ser att $f(t) = (1 - 2t)^{-1/2}$ är en lösning för $t \in (-\infty, 1/2)$. Svar: $x(t) = y(t) = (1 - 2t)^{-1/2}$ med existensintervall $(-\infty, 1/2)$.
