
Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1692, Analytiska och numeriska metoder för ordinära differentialekvationer, den 22 oktober 2024 kl 08.00-12.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Lös ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^2.$$

Substitutionen $z = x + y$ ger $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ och vi får den separabla ekvationen

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2$$

som har lösningen $\arctan(z) = x + c$ där c är en konstant, dvs $z = \tan(x + c)$, och vi får $y = \tan(x + c) - x$.

2. (4p) Finn den allmänna lösningen till

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

och verifiera ditt svar. Notera att felaktigt svar ger noll poäng.

Den karakteristiska ekvationen för den homogena ekvationen är $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$, och den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är därför på formen $c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

För att hitta en partikulärlösning $y = y_p$ antar vi $y = cxe^x$. Räkande ger $y' = c(e^x + xe^x)$ och $y'' = c(2e^x + xe^x)$, varpå insättning i vänsterledet ger

$$y'' - 3y' + 2y = c(2e^x + xe^x - 3(e^x + xe^x) + 2xe^x) = ce^x(2 - 3) = -ce^x$$

och vi ser att $c = -1$ ger en lösning; en partikulärlösning ges således av $y_p = -xe^x$.

Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen ges då av

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x$$

där c_1, c_2 är godtyckliga konstanter.

-
3. (4p) Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ och betrakta systemet

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \begin{pmatrix} \delta(t-1) \\ \alpha\delta(t-2) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \vec{0}.$$

Bestäm $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $\vec{x}(t) = \vec{0}$ för alla tillräckligt stora t , eller visa att det är omöjligt.

Laplacetransformering ger ekvationerna

$$\begin{cases} sX_1(s) = X_2(s) + e^{-s} \\ sX_2(s) = -X_1(s) + \alpha e^{-2s}; \end{cases}$$

den andra ekvationen ger $X_1(s) = -sX_2(s) + \alpha e^{-2s}$ som vid insättning i första ekvationen ger

$$s(-sX_2(s) + \alpha e^{-2s}) = X_2(s) + e^{-s}$$

varpå

$$X_2(s) = \frac{s\alpha e^{-2s} - e^{-s}}{1 + s^2}.$$

Inverstransformering ger

$$x_2(t) = \alpha u_2(t) \cos(t-2) - u_1(t) \sin(t-1).$$

För $t > 2$ ser vi att $x_2(t) = \alpha \cos(t-2) - \sin(t-1)$; om $x_2(t) = 0$ för alla tillräckligt stora t ser vi att $\alpha \cos(u-1) + \sin(u) = 0$ för alla stora u . Insättning av $u = 2\pi n$ (för stora n), tillsammans med $\cos(2\pi n - 1) = \cos(-1) \neq 0$ ger att $\alpha = 0$; således finns inget α med den sökta egenskapen.

4. (4p) Låt A vara en 2×2 matris och betrakta systemet

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Givet att $\det(A) = 0$, klassificera den kritiska punkten $\vec{0}$ m.a.p stabilitet (dvs, instabil, stabil eller asymptotiskt stabil) givet egenvärdena till A .

Eftersom $\det(A) = 0$ måste det karakteristiska polynomet $p_A(\lambda)$ vara på formen $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - r)$ för något $r \in \mathbb{R}$.

Om $r \neq 0$ är A diagonaliserbar, säg med egenvektorer v_1, v_2 , och den allmänna lösningen till systemet ges av

$$x = c_1 e^{0t} v_1 + c_2 e^{rt} v_2$$

och ser direkt att $r > 0$ ger ett instabilt system, medans $r < 0$ ger ett stabilt (men ej asymptotiskt stabilt) system.

Om $r = 0$ har vi en dubbelrot. Ifall A ändå är diagonaliserbar, finns det oberoende egenvektorer v_1, v_2 och den allmänna lösningen ges av

$$x = c_1 e^{0t} v_1 + c_2 e^{0t} v_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

dvs systemet är stabilt men inte asymptotiskt stabilt.

Om A ej är diagonaliserbar finns en egenvektor v_1 , och den allmänna lösningen ges av

$$x = c_1 e^{0t} v_1 + c_2 (t e^{0t} v_1 + e^{0t} w)$$

för någon listigt vald vektor w , och vi ser att systemet är instabilt (eftersom $|t v_1|$ går mot oändligheten när t växer.)

5. (4p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = -17$$

där den kontinuerliga funktionen f uppfyller $|\frac{df}{dy}(x, y)| \leq 42$ för alla x, y , samt att $f(x, 1) = 0$ för alla x . Visa att $y(x) < 2$ för $x \in [-17, 42]$.

Vi noterar först att f är Lipschitzkontinuerlig i y -variabeln, och Picards sats ger existens och entydighet.

Vi noterar sedan att $y(t) = 1$ för alla t är en stationär lösning. Om $y(x_1) = c \geq 2$ för något x_1 ger medelvärdessatsen (en lösning y måste vara kontinuerlig då den är deriverbar) att $y(x_2) = 1$ för något x_2 , eftersom $y(0) = -17$. Således får vi två olika lösningskurvor som skär varandra i x_2 , vilket motsäger Picards sats.

6. (4p) Låt P vara ett polynom av grad $d > 2$, och betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dt} = P(y), \quad y(0) = 1.$$

Visa att alla Picarditerat $\{y_n(t)\}_{n \geq 1}$ är polynomiella funktioner i t .

Som startvärde i Picarditerationer låter vi $y_0(t) = 1$ (som uppenbarligen är ett polynom.)

Iteraten definieras sedan som

$$y_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t P(y_n(s)) ds.$$

Vi ser således att om y_n är ett polynom, så är även $P(y_n(s))$ ett polynom, och eftersom definита integraler av polynom resulterar i polynom, så måste då även y_{n+1} vara ett polynom. Det sökta påståendet följer nu lätt medelst induktion.

7. (4p) Visa att $(0, 0)$ är en instabil kritisk punkt till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^3 + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x^5 + 2y^3. \end{cases}$$

Vi noterar först att om $(x(t), y(t))$ är en lösning så är $(X(t), Y(t)) = (x(-t), y(-t))$ en lösning till det tidsreverserade systemet

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = -(3X^3 + Y), \\ \frac{dY}{dt} = X^5 - 2Y^3. \end{cases}$$

och om det senare är asymptotiskt stabilt är det ursprungliga systemet instabilt: vi kan hitta initialvillkor X_0, Y_0 så att lösningar, till motsvarande begynnelseproblem, $X(t), Y(t)$ går mot noll då $t \rightarrow \infty$; om vi reverserar tiden ser vi att vi kan hitta initialvillkor x_0, y_0 , godtyckligt nära noll så att motsvarande lösningar $x(t), y(t)$ till BVP har egenskapen att $(x(\tau), y(\tau)) = (X_0, Y_0)$ för godtyckligt stora $\tau > 0$.

För att visa att det senare systemet är asymptotiskt stabilt använder vi en Lyapunovfunktion på formen $E = aX^{2n} + bY^{2m}$ (uppenbarligen positivt definit!). Vi får

$$\frac{dE}{dX}F + \frac{dE}{dY}G = 2naX^{2n-1}(-3X^3 - Y) + 2mbY^{2m-1}(X^5 - 3Y^3);$$

som, om vi tar $n = 3$ och $m = 1$ samt $a = 1$, $b = 3$, är lika med

$$6X^5(-3X^3) + 6Y(-2Y^3) = -(18X^8 + 12Y^4)$$

som uppenbart är negativt definit. Således är $E = X^6 + 3Y^2$ en strikt Lyapunovfunktion för det tidsreverserade systemet som således är asymptotiskt stabilt.
