

Tentamen SF1692, Analytiska och numeriska metoder för ordinära differentialekvationer, den 18 december 2023 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

och verifiera ditt svar. Notera att felaktigt svar ger noll poäng.

Eigenvärden till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ges av $\lambda_{\pm} = 1 \pm i$, med motsvarande egenvektorer $v_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$. En komplex lösning ges av $v(t) = e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ och två reella lösningar ges av

$$x_1(t) = \Re(e^t \begin{pmatrix} i \cos t - \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

och

$$x_2(t) = \Im(e^t \begin{pmatrix} i \cos t - \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Vi ser att x_1, x_2 är oberoende eftersom Wronskianen

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} = e^t(-\sin^2 t - \cos^2 t) = -e^t$$

är nollskild.

Med räkningarna

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

och

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

ser vi att x_1, x_2 verkligen är lösningar.

Svar: den allmänna lösningen ges av

$$C_1 e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - 2y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Laplacetransformering ger ekvationen

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = e^{-s}$$

som ger

$$Y(s) = \frac{e^{-s}}{(s - 1)^2}.$$

Tabell ger att $L^{-1}(1/(s - 1)^2) = te^t$ och vi får

$$y(t) = u_1(t)(t - 1)e^{t-1}.$$

3. (4p) Lös ekvationen

$$xy \, dx + (2x^2 + 3y^2 - 20) \, dy = 0$$

(lösningar på implicit form accepteras.)

Med $M = xy$, $N = 2x^2 + 3y^2 - 20$ ser vi att

$$\frac{dM/dx - dN/dy}{-M} = \frac{x - 4x}{-xy} = 3/y$$

bara beror på y , och en integrande faktor (IF) ges av $e^{\int 3/y \, dy} = y^3$. Multiplikation med denna IF ger den exakta ekvationen

$$xy^4 \, dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)y^3 \, dy = 0$$

och vi ser direkt att en funktion f på formen

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^4}{2} + g(y)$$

med g vald så att $g'(y) = 3y^5 - 20y^3$, tex $g(y) = y^6/2 - 5y^4$, har egenskapen att

$$df/dx + df/dy = xy^4 \, dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)y^3 \, dy = 0$$

Således ges en familj av implicita lösningar av

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^4}{2} + g(y) = \frac{x^2 y^4}{2} + y^6/2 - 5y^4 = C,$$

för $C \in \mathbb{R}$.

4. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = -1.$$

Vi noterar att $f(t, y) = y^{2/3}$ är Lipshitz-kontinuerlig på $\mathbb{R} \times I$ för alla kompakta intervall $I \subset (-\infty, 0)$ och $I \subset (0, \infty)$, och således gäller lokal entydighet för lösningar

till ekvationen $y' = y^{2/3}$, $y(0) = y_0 \neq 0$. Vi ser även att $y(t) = 0$ för alla t är en lösning. Med omskrivningen

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dt$$

ger integrering att $3y^{1/3} = t + C$, och vi ser att $y = ((t + C)/3)^3$ också ger lösningar; enligt ovanstående är dessa entydiga på intervall I sådana att $y(t) > 0$ eller $y(t) < 0$.

Således ger $y(t) = ((t - 3)/3)^3$, för $y \in [0, 3]$ en lösning som satisfierar $y(0) = -1$. Denna lösning kan sedan utvidgas på följande sätt: givet godtyckligt $D \geq 3$, är

$$y_D = \begin{cases} ((t - 3)/3)^3, & t \in (-\infty, 3) \\ 0, & t \in [3, D] \\ ((t - D)/3)^3, & t \geq D \end{cases}$$

en lösning.

5. (4p) Visa "faltungssatsen", dvs att

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

där $f * g$ betecknar faltingen av f och g .

Se boken.

6. (4p) Givet ett heltal $n > 0$ och ett reellt tal $\lambda > 0$, betrakta den homogena ekvationen

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} y^{(k)} = 0.$$

Finn en fundamental lösningmängd till ekvationen på $(-\infty, \infty)$.

Eftersom ekvationen är linjär av ordning n räcker det att hitta n stycken linjärt oberoende lösningar.

Med $D = d/dt$ och $p(x) = (x - \lambda)^n$ kan vi skriva om ekvationen som

$$p(D)y = 0$$

Eftersom

$$(D - \lambda)t^k e^{\lambda t} = kt^{k-1}e^{\lambda t} + \lambda t^k e^{\lambda t} - \lambda t^k e^{\lambda t} = kt^{k-1}e^{\lambda t}$$

ser vi att $p(D)t^k e^{\lambda t} = 0$ för $k < n$, och vi ser att funktionerna $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{n-1}e^{\lambda t}$ är lösningar. Om en linjärkombination av dessa lösningar är noll på något öppet (ej tomt) intervall I , dvs

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k\right)e^{\lambda t} = 0$$

för alla $t \in I$, bilda polynomet $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k$. Eftersom $e^{\lambda t} \neq 0$ för alla t kan vi hitta n distinkta punkter $t_1, \dots, t_n \in I$ så att

$$f(t_1) = f(t_2) = \dots = f(t_n) = 0$$

Då f som mest har grad $n - 1$ ser vi att f måste vara nollpolynomet, dvs $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$. Således är $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{n-1}e^{\lambda t}$ linjärt oberoende lösningar.

7. (4p) Visa att $(0,0)$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = x - y^3, \end{cases}$$

men en instabil kritisk punkt till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = x + y^3. \end{cases}$$

Första delen: med $F = -y - x^3$ och $G = x - y^3$ kan vi skriva systemet som $\frac{dx}{dt} = F$, $\frac{dy}{dt} = G$ och vi ser att $E = x^2 + y^2$ är en strikt Lyapunov funktion eftersom E är positivt definit, och

$$\frac{dE}{dx}F + \frac{dE}{dy}G = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) < 0$$

för $(x, y) \neq (0, 0)$. Punkten $(0, 0)$ är således asymptotiskt stabil.

Andra delen: vi noterar följande: om $(x(t), y(t))$ är en lösning till systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) = -y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) = x + y^3. \end{cases}$$

så är $(x_1(t), y_1(t)) = (x(-t), y(-t))$ en lösning till det "tidsreverserade" systemet

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -F(x_1, y_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = -G(x_1, y_1). \end{cases}$$

och vice versa.

Vi ser lätt att det tidsreverserade systemet är asymptotiskt stabilt med hjälp av den strikta Lyapunov-funktionen $E = x_1^2 + y_1^2$ (denna är positivt definit och

$$\begin{aligned} dE/dx_1(-F(x_1, y_1)) + dE/dy_1(-G(x_1, y_1)) &= 2x_1^2(y_1 - x_1^3) + 2y_1(-x_1 - y_1^3) \\ &= -2(x_1^4 + y_1^4) < 0 \end{aligned}$$

för $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$.) Eftersom det tidsreverserade systemet är asymptotiskt stabilt kan vi hitta nollskilda initialvillkor (X, Y) med egenskapen att $(x_1(t), y_1(t)) \rightarrow (0, 0)$ då $t \rightarrow \infty$, eller ekvivalent, lösningar till det ursprungliga systemet, med initialvillkor $(x(0), y(0)) = (\epsilon_0, \epsilon_1) \neq (0, 0)$ godtyckligt nära $(0, 0)$, med egenskapen $(x(t), y(t)) = (X, Y)$ för $t > 0$. Således är det ursprungliga systemet instabilt.
