
Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1692, Analytiska och numeriska metoder för ordinära differentialekvationer, den 24 oktober 2023 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Lös ekvationen

$$y' - 2xy = 6xe^{x^2}$$

och verifiera ditt svar. Notera att felaktigt svar ger noll poäng.

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $e^{\int (-2x)dx} = e^{-x^2}$ får vi

$$\frac{d}{dx}(ye^{-x^2}) = 6x$$

som ger $y = e^{x^2}(3x^2 + C)$.

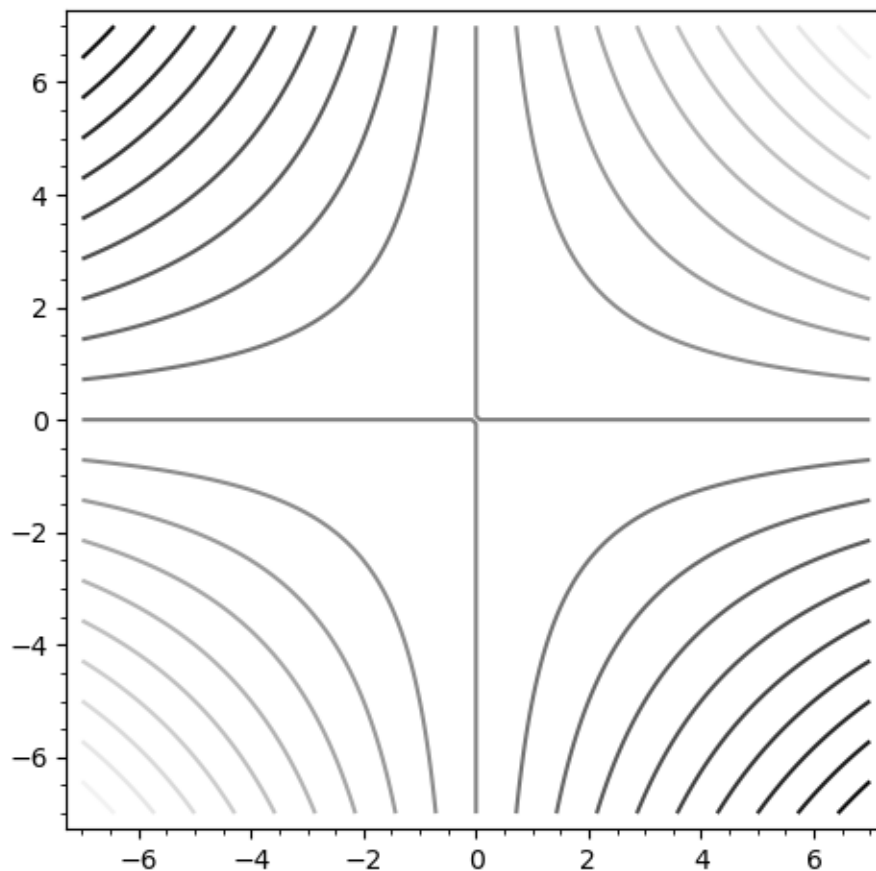
Insättning i ekvationen ger

$$VL = y' - 2xy = 6x^3e^{x^2} + 2Cxe^{x^2} - 2x(3x^2e^{x^2} + Ce^{x^2}) + 6xe^{x^2} = 6xe^{x^2} = HL$$

Svar: $y = 3x^2e^{x^2} + Ce^{x^2}$ där C är en godtycklig konstant.

2. (4p) Den sadelformade ytan $z = y^2 - x^2$ ligger ute i regnet. Finn regndropparnas banor längs sadeln, och skissa dessa. Ledtråd: regndroppar torde röra sig i motsatt riktning till gradienten, och gradienten är ... mot nivåkurvorna.

Regndropparna rör sig ortogonalt mot familjen av nivåkurvor $y^2 - x^2 = c$. Dessa satisfierar $\frac{dy}{dx} = x/y$, och en ekvation för den ortogonala familjen ges av $\frac{dy}{dx} = -y/x$, som kan skrivas som $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$; integration ger sedan $\ln |y| = -\ln |x| + C$, eller $y = D/x$ där $D \neq 0$. Vi noterar att även $y(x) = 0$ för alla x ger en lösning, och att linjen $x = 0$ är ortogonal mot nivåkurvorna.



3. (4p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + y = \delta(t - t_1) + a\delta(t - t_2), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

där $a \in \mathbb{R}$ och $0 < t_1 < t_2$. Finn alla a, t_1, t_2 så att lösningen $y(t)$ är nollskild för $t \in (\pi, 2\pi)$, och lika med noll för $t \notin (\pi, 2\pi)$.

Laplacetransformering ger

$$(s^2 + 1)Y(s) = e^{-st_1} + ae^{-st_2}$$

och vi får $Y(s) = \frac{e^{-st_1} + ae^{-st_2}}{s^2 + 1}$, varpå inverstransformering ger

$$y(t) = \sin(t - t_1)u_{t_1}(t) + a \sin(t - t_2)u_{t_2}(t - t_2)$$

Vi noterar att $y(t) = 0$ för $t \in [0, \pi]$ ger att $t_1 \geq \pi$, och $y(t) \neq 0$ för $y \in (\pi, 2\pi)$ ger att $t_1 = \pi$. För att $y(t)$ skall vara noll för alla stora t måste vi antingen ha $a = -1$ och $t_2 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, eller $a = 1$ och $t_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. För att $y(t) \neq 0$ på $(\pi, 2\pi)$ måste vi välja $t_2 = 2\pi$ och $a = 1$.

Svar: $t_1 = \pi, t_2 = 2\pi$ och $a = 1$.

4. (4p) Finn den allmänna lösningen till ekvationen

$$xy'' - (1 + x)y' + y = x^2 e^{2x}, \quad x > 0$$

Ansatsen $y = e^{ax}$ ger efter insättning att $y_1 = e^x$ är en lösning till den homogena ekvationen. Ansatsen $y = p(x)$ för p ett polynom ger att $y_2 = x + 1$ är en annan lösning till den homogena ekvationen (alternativt kan man använda reduktion av ordning.)

Variation av parametrar ger $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ där

$$u_1 = \int \frac{-y_2 R}{W} dx, \quad u_2 = \int \frac{y_1 R}{W} dx,$$

med $W = \det \begin{pmatrix} e^x & 1+x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} = -xe^x$ och $R = xe^{2x}$. Vi får

$$u_1 = \int (x+1)e^x dx = xe^x, \quad u_2 = - \int e^{2x} dx = -e^{2x}/2.$$

som ger

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = x \cdot e^x \cdot e^x - e^{2x}(x+1)/2 = \frac{e^{2x}}{2}(x-1).$$

Svar: den allmänna lösningen ges av

$$y = c_1 e^x + c_2(x+1) + \frac{e^{2x}}{2}(x-1),$$

för $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5. (4p) Betrakta ekvationen

$$x'' + a(x^2 - 1)x' + x = 0$$

där $a \geq 0$. Skriv om ekvationen som ett system, finn dess kritiska punkter och klassificera dessa m.a.p. stabilitet.

Med $y = x'$ får vi systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' = -(a(x^2 - 1)x' + x) = -(a(x^2 - 1)y + x) \end{cases}$$

För kritiska punkter måste vi ha $x' = y = 0$, dvs $y = 0$ samt (efter insättning av $y = 0$) $y' = -x = 0$ dvs den enda kritiska punkten ges av $x = y = 0$. Jacobianen ges av

$$J_{x,y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2axy + 1) & -a(x^2 - 1) \end{bmatrix}$$

och i den kritiska punkten får vi

$$J_{0,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$$

För $a > 0$ ser vi att $\text{trace}(J_{0,0}) > 0$ och således är $(0,0)$ instabil.

För $a = 0$ ger linjärisering ingen information, men eftersom systemet då ges av det linjära systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

ser vi att $(0,0)$ är stabil (men inte asymptotiskt stabil.)

-
6. (4p) Låt $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ vara lösningar till ekvationen

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

och bilda Wronskianen

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{pmatrix}.$$

Visa att $W(t_0) = 0$ för något $t_0 \in \mathbb{R}$ implicerar att $W(t) = 0$ för alla t .

Låt $\vec{v}_i(t) = [y_i(t) \ y_i'(t) \ y_i''(t)]^T$ för $i = 1, 2, 3$. Om $W(t_0) = 0$ kan vi hitta en icke-trivial linjärkombination $\sum_{i=1}^3 c_i \vec{v}_i(t_0) = \vec{0}$. Enligt superpositionsprincipen är då $y = \sum_{i=1}^3 c_i y_i$ en lösning till ekvationen som satisfierar initialvillkoren $y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0, y''(t_0) = 0$; vilken även den triviala lösningen $y_0(t) = 0$ för alla t gör — enligt entydighets satsen måste då $y(t) = 0$ för alla t . Således är $y(t) = y'(t) = y''(t) = 0$ för alla t och vi ser att

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = \vec{0}$$

för alla t vilket ger att $W(t) = 0$ för alla t .

7. (4p) Låt A vara en 3×3 matris med reella egenvärden $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$. Finn en strikt Lyapunov-funktion E för systemet $\vec{x}' = A\vec{x}$, dvs en funktion $E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ med egenskapen att E är positivt definit samt att $\frac{d}{dt}E(\vec{x}(t)) < 0$ om $\vec{x}(t)$ är en lösning till $\vec{x}' = A\vec{x}$, och $\vec{x}(t) \neq \vec{0}$.
-

För specialfallet $A = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ ser vi att $E(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 = \vec{x}^T \vec{x}$ fungerar:

$E(\vec{x}) \geq 0$ med likhet omm $\vec{x} = \vec{0}$ och

$$\frac{d}{dt}E(\vec{x}(t)) = (\vec{x}')^T \vec{x} + (\vec{x})^T \vec{x}' = (A\vec{x})^T \vec{x} + (\vec{x})^T A\vec{x} = 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i |x_i(t)|^2 < 0$$

om $\vec{x}(t) \neq \vec{0}$, och $\vec{x}(t)$ är en lösning till ekvationen.

För det generella fallet noterar vi följande: eftersom egenvärdena är distinkta existerar det en inverterbar matris M så att $A = M^{-1}DM$. Om vi låter $E(\vec{x}) = |M\vec{x}|^2 = (M\vec{x})^T M\vec{x} = \vec{x}^T M^T M\vec{x}$ ser vi att E är positivt definit, och, om $\vec{x}(t)$ är en lösning till ekvationen, att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\vec{x}(t)) &= (M\vec{x}'(t))^T M\vec{x}(t) + (M\vec{x}(t))^T M\vec{x}'(t) = \\ &= (MA\vec{x}(t))^T M\vec{x}(t) + (M\vec{x}(t))^T MA\vec{x}(t) = (DM\vec{x}(t))^T M\vec{x}(t) + (M\vec{x}(t))^T DM\vec{x}(t) \\ &= 2(M\vec{x}(t))^T DM\vec{x}(t) < 0 \end{aligned}$$

om $\vec{x}(t) \neq \vec{0}$ enligt vår tidigare räkning, eftersom M är inverterbar.
