
Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1692, Analytiska och numeriska metoder för ordinära differentialekvationer, den 19 december 2022 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' = 1 + (y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

och verifiera ditt svar. Notera att felaktigt svar ger noll poäng.

Vi sätter $v = y'$ vilket ger ekvationen $v' = 1 + v^2$ som kan skrivas om som

$$\frac{dv}{1 + v^2} = dt$$

varpå integrering ger $\arctan v = t + C$ och $y' = v = \tan(t + C)$. Integration ger $y = -\log(\cos(t + C)) + D$, där C, D är konstanter.

Koll: $y' = \tan(t + C)$, och $y'' = 1/\cos^2(t + C)$. Således är $VL = y'' = 1/\cos^2(t + C)$, och

$$HL = 1 + (y')^2 = 1 + \tan^2(t + C) = 1 + \frac{\sin^2(t + C)}{\cos^2(t + C)} = 1/\cos^2(t + C)$$

och y ger verkligen en lösning. Insättning av initialvillkor ger $\tan(C) = 1$, och vi kan ta $C = \pi/4$, och $y(0) = 0$ ger $D - \log(\cos(\pi/4)) = 0$, dvs $D = \log(\cos(\pi/4)) = \log(1/\sqrt{2}) = -(\log 2)/2$. (Insättning av C, D ger direkt att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.)

-
2. (4p) Kontrollera att en lösning till ekvationen

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$$

ges av $y_1(x) = e^x$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen, och verifiera ditt svar. Notera att felaktigt svar ger noll poäng.

Vi ansätter $y = e^x \cdot u$ där u är en okänd funktion, vi får då

$$y' = e^x(u + u'), \quad y'' = e^x(u + 2u' + u'')$$

som vid insättning i ursprungsekvationen, efter förenkling, ger

$$u''x - u' = 0.$$

Med $v = u'$ får vi $v'x - v = 0$ som har integrerande faktor $1/x$; vi får

$$\frac{d}{dx}(v/x) = 0$$

och $v = C_0 x$ för någon konstant C_0 . Detta ger $u = Cx^2 + D$ (för C, D konstanter) och $y = e^x u = e^x(Cx^2 + D)$.

Koll: ekvationen är linjär så det räcker att kolla att $y = e^x$ samt $y = x^2 e^x$ är lösningar.

Insättning av $y = e^x$ i ekvationen ger

$$xe^x - (2x + 1)e^x + (x + 1)e^x = 0.$$

Om $y = x^2 e^x$ får vi $y' = e^x(2x + x^2)$ och $y'' = e^x(2 + 4x + x^2)$ och insättning i ekvationen ger

$$\begin{aligned} xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y &= xe^x(2 + 4x + x^2) - (2x + 1)e^x(2x + x^2) + (x + 1)e^x x^2 \\ &= e^x(x^3 + 4x^2 + 2x - (2x + 1)(2x + x^2) + (x + 1)x^2) = 0. \end{aligned}$$

3. (4p) Betrakta systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y^3 + ax^2 \\ \frac{dy}{dt} = x^3 - a^3 \end{cases}$$

där a är en reell parameter.

- (a) Antag att $a \neq 0$. Finn alla kritiska punkter och klassificera dessa med avseende på stabilitet/instabilitet. (2p)
 - (b) Antag att $a = 0$. Finn alla kritiska punkter och klassificera dessa med avseende på stabilitet/instabilitet. (2p)
-

a: Vi börjar med att hitta kritiska punkter: vi får $x^3 = a^3$ som ger $x = a$ och sedan $y = a$. Räkning ger att Jacobianen $J_{x,y}$ ges av

$$J_{x,y} = \begin{pmatrix} 2ax & -3y^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

och vi får

$$J_{a,a} = \begin{pmatrix} 2a^2 & -3a^2 \\ 3a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\text{Tr}(J_{a,a}) = 2a^2 > 0$ (då $a \neq 0$) ser vi direkt att (a, a) är instabil (minst ett eget värde har positiv realdel); då $|J_{a,a}| = 9a^4 > 0$ får vi att rötterna till det karakteristiska polynomet ges av $\lambda = a^2 \pm a^2\sqrt{-8}$ och vi ser att (a, a) är instabila spiralpunkter.

b: Räkningen i a: ger att $(0, 0)$ är enda kritiska punkten, och $J_{0,0}$ är nollmatrisen — således ger linjärisering ingen information. Fasplanmetoden ger systemet

$$\begin{cases} x' = -y^3 \\ y' = x^3 \end{cases}$$

och vi får $dy/dx = y'/x' = x^3/(-y^3)$, som ger $-y^3 dy = x^3 dx$ och vi ser att banorna $(x(t), y(t))$ ligger på kurvor på formen $x^4 + y^4 = 4C$ (med $C \geq 0$). Således är $(0, 0)$ ett stabilt centrum.

-
4. (4p) Betrakta ekvationen

$$y'' + y = A\delta(t - t_0), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

där A, t_0 är reella parametrar. Bestäm A och det minsta $t_0 > 0$ så att $y(t) = 0$ för $t > 10^{100}$.

Laplace-transformering ger

$$s^2 Y - s - 0 + Y = A e^{-st_0}$$

och vi får

$$Y = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{A e^{-st_0}}{s^2 + 1}$$

som efter inverstransformering ger

$$y(t) = \cos(t) + A U_{t_0}(t) \sin(t - t_0)$$

dvs, för $t > t_0$, har vi $y(t) = \cos(t) + A \sin(t - t_0)$ vilket direkt ger $A = \pm 1$. Fallet $A = 1$ ger det minimala $t_0 = \pi/2$, och $A = -1$ ger $t_0 = 3\pi/2$. Således är $A = 1$ och $t_0 = \pi/2$ de sökta värdena.

5. (4p) Givet en differentialekvation, skriven på differentialformen

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

finns det en integrerande faktor $\mu(x, y)$ (dvs, μ väljs så att ekvationen $\mu(x, y) \cdot M(x, y)dx + \mu(x, y) \cdot N(x, y)dy = 0$ är exakt.) Bevisa, eller ge motexempel till följande påstående: funktionen $\mu(x, y)$ är unik upp till multiplikation med en konstant.

För exakthet räcker det att $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, dvs vi söker integrerande faktorer μ så att

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N).$$

För $M = N = 1$ och $\mu = e^{\alpha(x+y)}$, för α godtycklig konstant, ser vi att $\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \alpha e^{\alpha(x+y)}$ och $\frac{\partial}{\partial x}(\mu M) = \alpha e^{\alpha(x+y)}$. Vi ser därmed att integrerande faktorer ej är unika (upp till multiplikation med konstanter.)

6. (4p) Låt A vara en reell symmetrisk $n \times n$ matris (dvs $A^T = A$). Bestäm en fundamental lösningsmängd på $(-\infty, \infty)$ (dvs, n stycken linjärt oberoende lösningar på $(-\infty, \infty)$) till ekvationen

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},$$

och visa att den verkliga är en sådan.

Eftersom A är symmetrisk är matrisen diagonaliserbar och vi kan hitta n stycken oberoende egenvektorer $v_1, \dots, v_n$ med tillhörande egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (dvs $Av_i = \lambda_i v_i$ för $i = 1, \dots, n$).

Om vi sätter $x_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$ (för $i = 1, \dots, n$) ser vi att $x'_i = \lambda_i x_i$, och att $Ax_i = \lambda_i x_i$ — dvs $x_1, \dots, x_n$ är verkligen lösningar till ekvationen, med lösningsintervall $(-\infty, \infty)$. För att vektorerna skall bilda en fundamental lösningsmängd måste de vara oberoende; för att visa detta räcker det att visa att Wronskianen $W(t)$ (dvs determinanten av matrisen vars kolonner är $x_1(t), \dots, x_n(t)$) är nollskild för något värde på t . Vi ser nu att

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \neq 0$$

eftersom vektorerna är oberoende.

7. (4p) Låt $y_1(x)$ och $y_2(x)$ vara linjärt oberoende lösningar till ekvationen

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

på ett intervall $[a, b]$. Visa att $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ är den allmänna lösningen till ekvationen på $[a, b]$ (dvs, att *alla* lösningar till ekvationen kan fås genom lämpliga val av c_1, c_2 .)

Se bok.
