
Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1692, Analytiska och numeriska metoder för ordinära differentialekvationer, den 25 oktober 2022 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

OBS: Inga hjälpmedel, utöver de bifogade formelbladen, är tillåtna på tentamensskrivningen. Formelblad finns efter tentalydelsen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Bestäm de ortogonala banorna till familjen av kurvor $y = C \cdot x^4$. Skissa båda familjerna av kurvor.

Vi kan skriva kurvfamiljen som $y/x^4 = C$ (för $x \neq 0$) och dessa kurvor svarar mot lösningar till ekvationen

$$\frac{y'}{x^4} - \frac{4y}{x^5}$$

som kan förenklas till $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$. Ekvationen för den ortogonala familjen av kurvor ges av den separabla ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

som kan skrivas på form $4ydy = -x dx$; integrering ger då $2y^2 = -x^2/2 + C_0$, eller (med ny konstant) $x^2 + 4y^2 = C$, dvs en familj av ellipser.

2. (4p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' = (-2x + y)^2 - 7, \quad y(0) = 0$$

Substitutionen $z = y - 2x$ ger $z' = y' - 2$ och vi får ekvationen

$$z' = z^2 - 9$$

som, då $1/(z^2 - 9) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+3} \right)$ kan skrivas om som

$$\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+3} \right) dz = 6dx$$

varpå integrering av båda sidorna ger oss

$$\ln \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 6x + C_0$$

vilket ger

$$\frac{z-3}{z+3} = C_1 e^{6x}, \quad C_1 \neq 0$$

och vi får

$$z = \frac{-3(1 + C_1 e^{6x})}{C_1 e^{6x} - 1}.$$

Begynnelsevärdet $y(0) = 0$ ger $z(0) = 0$, och vi får $C_1 = -1$, dvs $z = 3 \frac{1-e^{6x}}{1+e^{6x}}$ och således $y = 3 \frac{1-e^{6x}}{1+e^{6x}} + 2x$; lösningen existerar för alla $x \in \mathbb{R}$.

-
3. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}.$$

Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2$ har en dubbelrot, och den allmänna lösningen till den homogena ekvationen ges av

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Partikulärlösningen kan antingen hittas mha gissning (säg $y = p(x)e^{2x}$ där $p(x)$ är ett polynom av lågt gradtal), reduktion av ordning, variation av parametrar (eller mha Laplacetransform för den delen.)

Vi noterar att $y = x^2 e^{2x}$ ger efter lite räknande $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$ medans $y = x^3 e^{2x}$ ger $y'' - 4y' + 4y = 6x e^{2x}$; således är $y_p = x^2 e^{2x}/2 + x^3 e^{2x}/6$ en partikulärlösning. Den allmänna lösningen fås nu mha superposition, och ges av

$$y = x^2 e^{2x}/2 + x^3 e^{2x}/6 + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

-
4. (4p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0.$$

Finn alla $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ för vilka $|\bar{x}(t)| \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$.

Låt A beteckna matrisen i ekvationen. Vi ser direkt att egenvärdena till A är $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_{-1} = -1$, och den allmänna lösningen till ekvationen ges av

$$x = C_1 e^t v_1 + C_2 e^{2t} v_2 + C_3 e^{-t} v_3$$

där v_1, v_2, v_3 är egenvektorer till motsvarande egenvärden. För att $|x(t)| \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ måste vi ha $C_1 = C_2 = 0$, medans C_3 kan väljas fritt.

För att hitta v_3 söker vi icke-trivial lösning $(A + I)v_3 = 0$; då systemet är på

trappform ser vi direkt att $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ är en egenvektor.

Svar: alla x_0 på formen $C \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}$.

-
5. (4p) Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' &= y^3 \\ y' &= -x^3 \end{cases}$$

Finn alla stationära punkter och klassificera dessa m.a.p. stabilitet.

Dessvärre ger linjäriseringen ingen information. Vi definierar $E = E(x, y) = x^4 + y^4$. Funktionen är positivt definit, och ger oss en Lyapunov-funktion om

$$G := \frac{dE}{dx}x' + \frac{dE}{dy}y'$$

är negativt semidefinit; vi ser att

$$G = 4x^3 \cdot y^3 + 4y^3 \cdot (-x^3) = 0 \leq 0$$

för alla x, y . Således är E en Lyapunov-funktion och systemet är stabilt. (Eftersom $G = 0$ ser vi att E är konstant längs alla lösningskurvor, dvs lösningar till ekvationen ligger på kurvorna $x^4 + y^4 = C$; således är den kritiska punkten ej asymptotiskt stabil.)

6. (4p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

där f och $\frac{df}{dy}$ är kontinuerliga på en sluten rektangel R , och där (x_0, y_0) är en inre punkt i R . Antag att $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är lösningar på något icke-tomt intervall I_1 som innehåller x_0 . Visa att det existerar ett (icke-tomt) intervall $I_2 \subset I_1$ så att $y_1(x) = y_2(x)$ för alla $x \in I_2$. Anmärkning: om du använder dig av satsen om existens och entydighet ("Picard") bör du visa denna. Ledtråd: du behöver inte göra detta.

Eftersom y_1, y_2 är kontinuerliga kan vi välja ett icke-tomt slutet intervall $I_3 \subset I_1$ så att $\{(x, y_1(x)) : x \in I_3\} \subset R$ och $\{(x, y_2(x)) : x \in I_3\} \subset R$.

Eftersom df/dy är kontinuerlig på R kan vi hitta $L > 0$ så att $|df/dy| \leq L$ på R ; medelvärdessatsen ger då att $|f(x, a) - f(x, b)| \leq L|a - b|$ om $(x, a) \in R$ och $(x, b) \in R$. Låt $I_2 = [x_0 - 1/(2L), x_0 + 1/(2L)] \cap I_3$, och låt

$$M = \max_{x \in I_2} |y_1(x) - y_2(x)| < \infty$$

Omskriving av ekvationen på integralform ger

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_i(x)) dx, \quad i = 1, 2$$

vilket ger, för $x \in I_2$, att

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq |x - x_0| \cdot L \cdot M \leq M/2$$

Således är $M \leq M/2$ vilket innebär att $M = 0$, och vi ser att $y_1(x) = y_2(x)$ för alla $x \in I_2$.

7. (4p) Betrakta begynnelsevärdesproblemet (BVP)

$$y'' + ay' + by = f(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

där a, b är reella tal. Antag att $f(t)$ är en kontinuerlig funktion av exponentiell typ, dvs att för något val av konstanter $C, A > 0$ gäller att $|f(t)| \leq Ce^{At}$ för alla tillräckligt stora t . Visa att lösningen $y = y(t)$ till BVP är en funktion av exponentiell typ.

Vi betraktar först "impulssvaret", dvs lösningar då $f(t) = \delta(t)$; Laplacetransformering ger

$$(s^2 + as + b)Y = 1$$

dvs $Y(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$. Inspektion av tabellen ger att $y(t)$, oavsett värden på a, b är av exponentiell typ (notera att e^{at} , $\sin(\beta t)e^{at}$, $\cos(\beta t)e^{at}$ samt te^{at} alla är av exponentiell typ, och detsamma gäller linjärkombinationer av dylika funktioner.)

Således är impulsvaret $h(t) = L^{-1}(Y(s))$ av exponentiell typ, och det existerar C_1, A så att $|h(t)| \leq C_1 e^{At}$ för alla tillräckligt stora t ; genom att välja ännu större C_1, A kan vi anta att $|h(t)| \leq C_1 e^{At}$ gäller för alla $t \geq 0$.

Eftersom $f(t)$ är kontinuerlig och av exponentiell typ kan vi på samma sätt hitta C_2, B så att $|f(t)| \leq C_2 e^{Bt}$ gäller för $t \geq 0$. Vidare, genom att om nödvändigt välja ännu större A, B kan vi anta att $B - A \geq 1$.

Laplacetransform ger att $Y(s) = F(s) \cdot H(s)$, och således är $y = f \star h$ (dvs f faltat med h .) Vi får då

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

och således är, för alla $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^t C_1 \cdot C_2 e^{B\tau} e^{A(t-\tau)} d\tau \leq C_1 \cdot C_2 e^{At} \int_0^t e^{(B-A)\tau} d\tau \\ &= C_1 \cdot C_2 e^{At} \left[\frac{e^{(B-A)\tau}}{B-A} \right]_0^t \leq C_1 \cdot C_2 e^{At} \cdot e^{(B-A)t} = C_1 \cdot C_2 e^{Bt} \end{aligned}$$

och vi ser att även y är av exponentiell typ.
