

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Är det möjligt att hitta en funktion $v(x, y)$ så att $x^4 - y^4 + iv(x, y)$ är holomorf? Om så är fallet, finn v .

Låt $u(x, y) = x^4 - y^4$; för att u skall kunna vara realdelen av en holomorf funktion måste u vara harmonisk i någon omgivning. Eftersom $u_{xx} + u_{yy} = 12(x^2 - y^2) = 0$ bara gäller på linjerna $y = x$ samt $y = -x$ är u ej harmonisk i någon omgivning. Det finns alltså ingen sådan funktion $v(x, y)$.

2. (4p) Finn Laurentserien, centrerad vid $z = 1$, för funktionen $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, och ange konvergensringen ("annulus of convergence").

Eftersom $1/(z-2) = -1/(1-(z-1)) = -\sum_{n \geq 0} (z-1)^n$ ges Laurentserien för f av

$$-\left(\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n\right),$$

med konvergensring $0 < |z-1| < 1$.

3. (4p) Beräkna $\int_{C[2,3]} \frac{\cos(z)}{\sin^2(z)} dz$.

Eftersom nollställena till $\sin^2(z)$ inuti $C[2, 3]$ ges av $z = 0, \pi$ så är

$$\int_{C[2,3]} \frac{\cos(z)}{\sin^2(z)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{\cos(z)}{\sin^2(z)} \right) + \operatorname{Res}_{z=\pi} \left(\frac{\cos(z)}{\sin^2(z)} \right) \right).$$

Eftersom både $\cos(z)$ och $\sin^2(z)$ är jämna funktioner är även kvoten en jämn funktion. Laurentserien, vid $z = 0$, för kvoten består således av potenser med jämna exponenter och vi får $\operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{\cos(z)}{\sin^2(z)} \right) = 0$. Eftersom $\frac{\cos(z)}{\sin^2(z)} = \frac{-\cos(z-\pi)}{\sin^2(z-\pi)}$ består även Laurentserien, vid $z = \pi$, för $\frac{\cos(z)}{\sin^2(z)}$ av potenser av $(z-\pi)$ med jämna exponenter och vi ser att även den andra residyn är noll. Svar: 0.

4. (4p) Finn en konform bijektion från halvdiskens $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ till kvadranten $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

$f(z) = \frac{z+1}{1-z}$ avbildar tripeln $(-1, 0, 1)$ på $(0, 1, \infty)$, och således avbildas $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ på $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ och $C[0, 1]$ på en generaliserad cirkel som är vinkelrät mot $\mathbb{R}$ och innehåller punkterna $0, \infty$ dvs bilden av $C[0, 1]$ är den imaginära axeln. Således är bilden av $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ en av de fyra öppna kvadranterna; då $f(i/2) = (1+i/2)/(1-i/2) = (1+i/2)^2/(1+1/4) = (3/4+i)/(5/4)$ måste det vara den första kvadranten. Svar: $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$.

-
5. (4p) Antag att z_0 är en isolerad singularitet till f . Visa att z_0 är hävbar om och endast om $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.
-

Se boken.

6. (4p) Låt f, g vara holomorfa funktioner på $D[0, 1]$ med egenskapen att $f(0) = g(0) = 0$. Visa att $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ (behandla även fallet då gränsvärdena är oändliga.)
-

Vi behandlar först fallet då både f, g ej är konstanta. Vi kan skriva f, g som Taylorserier, säg $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k$ och $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k z^k$ där $a_m, b_n \neq 0$ och $m, n \geq 1$. Vi har även $f'(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k k z^{k-1}$ och $g'(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k k z^{k-1}$.

Om $m = n$ ser vi nu att $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{g(z)} = a_m/b_m$ och $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = (ma_m)/(mb_m) = a_m/b_m$, dvs gränsvärdena är lika.

Om $m > n$ ser vi på samma sätt att båda gränsvärdena är lika med noll, och om $m < n$ gäller $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \infty$.

Om $f(z) = 0$ för alla $z \in D[0, 1]$, och g ej är icke konstant gäller samma för $f'(z)$ och $g'(z)$; således är båda gränsvärdena lika med noll.

Om $g(z) = 0$ för alla $z \in D[0, 1]$ är ingen av kvoterna inuti gränsvärdena väldefinierade.

7. (4p) Låt $f(z) = 1/z^2$, låt $A = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$ och antag att g är en hel funktion. Visa att det existerar $z \in A$ så att $|f(z) - g(z)| > 1/10$.
-

Vi noterar först att $\int_{C[0,1]} z f(z) dz = 2\pi i$. Om $|f(z) - g(z)| \leq 1/10$ gäller för alla $z \in A$ ser vi då, eftersom $zg(z)$ är en hel funktion, att

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_{C[0,1]} z f(z) dz = \int_{C[0,1]} z(f(z) - g(z)) dz + \int_{C[0,1]} z g(z) dz \\ &= \int_{C[0,1]} z(f(z) - g(z)) dz \end{aligned}$$

vilket ger en motsägelse eftersom $|\int_{C[0,1]} z(f(z) - g(z)) dz| \leq 2\pi/10$,
