
Matematiska Institutionen, KTH

Tentamen SF1691, Komplex Analys, den 28 maj 2025 kl 08.00-13.00.

Examinator: Pär Kurlberg (08-7906582).

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

-
1. (4p) Visa att $xy + 3x^2y - y^3$ är harmonisk samt finn dess harmoniska konjugat.

Med $u = xy + 3x^2y - y^3$ får vi $u_x = y + 6xy$, $u_{xx} = 6y$ och $u_y = x + 3x^2 - 3y^2$, $u_{yy} = -6y$ och således är $u_{xx} + u_{yy} = 6y - 6y = 0$; då alla andra ordningens partialderivator är kontinuerliga är u därmed harmonisk.

Vi söker det harmoniska konjugatet v genom att söka lösning till Cauchy-Riemann ekvationerna;

$$v_y = u_x = y + 6xy$$

ger $v = y^2/2 + 3xy^2 + g(x)$ för någon funktion g . Ekvationen $v_x = -u_y$ ger sedan

$$3y^2 + g'(x) = 3y^2 - (x + 3x^2);$$

vi kan ta $g(x) = -(x^2/2 + x^3)$ vilket ger $v = y^2/2 + 3xy^2 - x^2/2 - x^3$.

2. (4p) Beräkna

$$\int_{C[0,1]} \frac{e^z}{z^3 \cos(z)} dz.$$

Eftersom $1/\cos(z) = 1/(1 - z^2/2 + \dots) = 1 + z^2/2 + \sum_{n \geq 2} a_n z^{2n}$ och $e^z = 1 + z + z^2/2 + \sum_{n \geq 3} b_n z^n$ får vi

$$\frac{e^z}{\cos z} = (1 + z + z^2/2)(1 + z^2/2) + \sum_{n \geq 3} c_n z^n = 1 + z + z^2 + \sum_{n \geq 3} d_n z^n.$$

Således är

$$\int_{C[0,1]} \frac{e^z}{z^3 \cos(z)} dz = \int_{C[0,1]} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

-
3. (4p) Finn en konform bijektion mellan $D[0,1]$ och det övre halvplanet $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$.

Möbiusavbildningen $f(z) = \frac{z-1}{z+1} \frac{i+1}{i-1}$ avbildar $(1, i, -1)$ på $(0, 1, \infty)$, dvs den avbildar enhetscirkeln på $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Eftersom f är holomorf på $\mathbb{C} - \{-1\}$ och $f'(z) \neq 0$ för alla $z \in D[0,1]$ är f en konform avbildning på $D[0,1]$. Eftersom f ger en bijektion från $\hat{\mathbb{C}}$ till $\hat{\mathbb{C}}$ ger f en konform bijektion mellan $D[0,1]$ och $f(D[0,1])$ och det räcker nu att visa att $f(D[0,1]) = H$.

Eftersom

$$f(z) = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} \frac{(i+1)^2}{-2} = -i \frac{|z|^2 - 1 + z - \bar{z}}{|z+1|^2}$$

och vi ser att

$$\Im(f(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|z + 1|^2}.$$

Således får vi att $f(D[0, 1]) \subset H$ samt $f(\{z : |z| > 1\}) \subset \{z : \Im(z) < 0\}$; eftersom $f(C[0, 1]) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ och f ger en bijektion på $\hat{\mathbb{C}}$ ger f en bijektion mellan $D[0, 1]$ och H .

4. (4p) Låt f vara en icke-konstant holomorf funktion på $D[0, 1]$ med $f(0) = 0$. Visa att det existerar $r > 0$ så att $f(z) = w$ har en lösning för alla $w \in D[0, r]$.
-

Eftersom f är holomorf och $f(0) = 0$ kan vi skriva $f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n$ (med absolutkonvergens för $z \in D[0, 1]$) för något heltal $N > 0$, där $a_N \neq 0$, och vi får

$$f(z) = a_N z^N + z^{N+1} \cdot \sum_{n \geq 0} a_{N+1+n} z^n;$$

eftersom serien är absolutkonvergent för $|z| < 1$ (och $a_N \neq 0$) kan vi välja $r > 0$ så att

$$|z^{N+1} \cdot \sum_{n \geq 0} a_{N+1+n} z^n| < |a_N| r^N / 3$$

för alla $z \in C[0, r]$. Om $|w| \leq |a_N| r^N / 3$ ser vi att

$$|a_N z^N - w| \geq (2/3) |a_N| r^N > |z^{N+1} \cdot \sum_{n \geq 0} a_{N+1+n} z^n|$$

gäller för alla $z \in C[0, r]$; Rouches sats garanterar då en lösning till $0 = f(z) - w = a_N z^N - w + z^{N+1} \cdot \sum_{n \geq 0} a_{N+1+n} z^n$. OM $a_N z^N - w = 0$ har en lösning i $D[0, r]$. Vi ser nu lätt att en lösning ges av $z_0 = (w/a_N)^{1/N}$; eftersom $|w| \leq |a_N| r^N / 3$ får vi $|z_0| \leq r/3^{1/N} < r$.

5. (4p) Låt $R > r > 0$ och antag att f är holomorf på $D[w, R]$. Visa att

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C[w, r]} \frac{f(z)}{(z - w)^2} dz.$$

Se boken.

6. (4p) Bestäm antalet rötter till ekvationen $z^4 - z^3 + 13z^2 - z + 3 = 0$ i varje kvadrant av det komplexa talplanet.
-

Låt $f(z) = z^4 - z^3 + 13z^2 - z + 3$. För $x \leq 0$ ser vi att $f(x) \geq 3$, för $x \in [0, 1]$ ser vi att $f(x) \geq 1$, och för $x \geq 1$ ser vi att $f(x) \geq 3$. Således saknar f rötter på den reella axeln. Eftersom

$$f(iy) = y^4 + iy^3 - 13y^2 - iy + 3 = y^4 - 13y^2 + 3 + i(y^3 - y) =: g(y) + ih(y)$$

ser vi att $f(iy) = 0$ ger att $h(y) = y^3 - y = 0$, dvs $y = 0, y = \pm 1$, men för dessa y -värden är $g(y) \neq 0$ och således saknar f rötter längs den imaginära axeln.

För stora $R > 0$, låt $\gamma = \gamma(R)$ beteckna den slutna kurvan $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, där γ_1 består av det vertikala segmentet mellan 0 och iR , γ_2 kvartscirkeln centrerad i origo och som går mellan iR och $-R$, och låt γ_3 vara det horisontella segmentet mellan $-R$

och 0. Enligt argumentprincipen ges antalet nollställen inuti γ som variationen av argumentet av $f(z)$ längs γ , delat med 2π .

Eftersom $f(x) > 0$ för $x \in [-R, 0]$ är argumentvariation längs γ_3 noll. För $|z| = R$ och R stort ser vi att $f(z) = z^4(1 + O(1/R))$, och argumentvariationen längs γ_2 är $4 \cdot \pi/2 + O(1/R) = 2\pi + O(1/R)$.

För att finna argumentvariationen längs γ_1 noterar vi att $f(0) = 3$, att $h(y) < 0$ för $y \in (0, 1)$ och att $g(y)$ går mellan 3 till -9 för $y \in [0, 1]$; argumentvariationen då $y \in [0, 1]$ är således $-\pi$. Eftersom $h(y) > 0$ för $y > 1$ och $g(y)$ går från -9 till $R^4 + O(R^2)$ då $y \in [1, R]$ är argumentvariationen $-\pi + O(1/R)$ då $y \in [1, R]$ (notera att $\arg f(iR) = \arg(R^4 + O(R^3)) = \arg(1 + O(1/R)) = 0 + O(1/R)$). Således är den total argumentvariationen $2\pi - 2\pi + O(1/R)$; genom att låta R gå mot oändligheten ser vi att $f(z)$ inte har några rötter inuti γ . Eftersom f har reella koefficienter ser vi att $f(z)$ saknar rötter då $\Re(z) < 0$, och att av de resterande fyra rötterna måste 2 stycken ligga i första kvadranten, och två i den fjärde kvadranten.

7. (4p) Låt $L = \{x + iy : x, y \in \mathbb{Z}\}$, och låt P vara en meromorf funktion på $\mathbb{C}$ som är holomorf bortsett från poler för $z \in L$, och vars Laurentserie vid origo är på formen

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n},$$

och med egenskapen att $P(z + w) = P(z)$ för alla $z \in \mathbb{C}$ och $w \in L$ (" P är dubbelperiodisk".) Visa att det existerar $a, b \in \mathbb{C}$ så att

$$(P'(z))^2 = 4P^3(z) + aP(z) + b$$

gäller för alla $z \in \mathbb{C}$

Låt $B = \{z : |\Im(z)| \leq 1/2, |\Re(z)| \leq 1/2\}$, och låt $Q(z) = (P'(z))^2 - 4P(z)^3 - aP(z)$. Eftersom P är dubbelperiodisk är även P' dubbelperiodisk, och likaså Q .

Laurentserien för $P'(z)$ ges av $P'(z) = -2/z^3 + 2a_1z + 4a_2z^3 + \dots$, och vi ser att

$$(P'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_1}{z^2} + h(z)$$

med h är analytisk, att

$$4P(z)^3 = 4\left(\frac{1}{z^6} + \frac{3a_1}{z^2}\right) + g(z)$$

med g analytisk, och vi ser att

$$(P'(z))^2 - 4P(z)^3 = -\frac{8a_1}{z^2} - \frac{12a_1}{z^2} + h(z) - g(z)$$

Således kan vi välja a så att $1/z^2$ termen i Laurentserien för Q försvinner; med detta val ser vi att Laurentserien för Q inte innehåller några negativa potenser av z , dvs Q har en hävbar singularitet vid $z = 0$. Periodiciteten ger nu att alla singulariteter för Q är hävbara, dvs Q representeras av en hel funktion. Då Q är hel är den begränsad på B , meddelst periodiciteten ser vi att Q är begränsad i hela $\mathbb{C}$, och måste således vara konstant, säg $Q(z) = b$.
