

**OBS:** Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen. För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

1. (4p) Bestäm en Möbiusavbildning  $M$  som avbildar punkterna  $1, 2, 3$  på punkterna  $2, 3, 5$ .

---

Låt  $M_1 = \frac{1-z}{z-3}$  beteckna Möbiusavbildningen som avbildar  $(1, 2, 3)$  på  $(0, 1, \infty)$ , och låt  $M_2 = 2\frac{2-z}{z-5}$  beteckna Möbiusavbildningen som avbildar  $(2, 3, 5)$  på  $(0, 1, \infty)$ . Om  $w = 2\frac{2-z}{z-5}$  får vi  $z = \frac{4+5w}{w+2}$ , dvs  $M_2^{-1} = \frac{4+5z}{z+2}$ . Den sökta avbildningen ges då av

$$M_2^{-1} \circ M_1 = \frac{4 + 5\frac{1-z}{z-3}}{\frac{1-z}{z-3} + 2} = \frac{4z - 12 + 5 - 5z}{1 - z + 2z - 6} = \frac{z + 7}{5 - z}.$$

- 
2. (4p) Låt  $u(x, y) = e^x \sin y$ .

(a) (1p) Visa att  $u$  är harmonisk på  $\mathbb{C}$ .

(b) (3p) Finn en hel funktion  $f$  så att  $\operatorname{Re}(f) = u$ .

---

a: Räkning ger  $u_x = u$ ,  $u_{xx} = u$  och att  $u_y = e^x \cos y$ ,  $u_{yy} = -e^x \sin y$ . Vi får då att  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , dvs  $u$  är harmonisk (att  $u$  är 2 gånger kontinuerligt deriverbar är uppenbart.)

b: Eftersom  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  (med  $z = x + iy$ ) ser vi direkt att  $-ie^z = e^x(\sin y - i \cos y)$ . Således kan vi ta  $f(z) = -ie^z$ .

- 
3. (4p) Beräkna integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$  med hjälp av residykalkyl.

---

Låt  $\zeta = e^{2\pi i/8} = (1+i)/\sqrt{2}$ . Då ges rötterna till  $z^4 + 1 = 0$  av  $\pm\zeta$  samt  $\pm i\zeta$ ; de två rötterna  $\zeta, i\zeta$  ligger i övre halvplanet. Givet  $R > 0$ , låt  $\gamma_1(R)$  beteckna sträckan från  $-R$  till  $R$ , och låt  $\gamma_2(R)$  beteckna den orienterade halvcirkeln given av  $Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Eftersom  $f(z) := 1/(1+z^4)$  är meromorf i övre halvplanet, med poler av ordning ett vid  $\zeta, i\zeta$  får vi att

$$\int_{\gamma_1(R)} f + \int_{\gamma_2(R)} f = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z=\zeta}(f) + \operatorname{Res}_{z=i\zeta}(f)).$$

Mha L'Hopitals sats får vi  $\operatorname{Res}_{z=\zeta}(f) = 1/(4\zeta^3)$  och  $\operatorname{Res}_{z=i\zeta}(f) = 1/(4(i\zeta)^3)$ , och högerledet ges således av

$$2\pi i \left( \frac{1}{4\zeta^3} + \frac{i}{4\zeta^3} \right) = \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{1+i}{i\zeta} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+i}{(1+i)/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Eftersom  $|f(z)| = O(1/R^4)$  för  $|z| = R$  och  $R > 100$ , får vi uppskattningen  $\int_{\gamma_2(R)} f = O(R/R^4) = O(R^{-3})$  och således är

$$\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{\gamma_1(R)} f = \pi/\sqrt{2} + O(R^{-3})$$

---

och genom att låta  $R \rightarrow \infty$  får vi  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .

---

4. (4p) Definiera "halvcirkel-kurvan"  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  där  $\gamma(t) = 2\exp(it)$ . Beräkna integralen

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$


---

Med parametriseringen  $z = 2e^{it}$  får vi  $dz = 2ie^{it}dt$ , och

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{2ie^{it}}{2e^{it}} dt = \pi i.$$


---

5. (4p) Visa Liouvilles sats (dvs att en hel funktion som är begränsad måste vara konstant.)
- 

Se bevis i boken.

---

6. (4p) Låt  $f(z) = z - 1/2$ , och låt  $x > 10$  vara ett reellt tal. Beräkna

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz := i \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{f'(2+it)}{f(2+it)} x^{2+it} dt$$

där  $x^z = \exp(z \log x)$  och  $\log x$  betecknar principalgrenen för logaritmen.

---

Låt  $\gamma_1(T)$  vara sträckan mellan  $2 - iT$  och  $2 + iT$ ,  $\gamma_2(T)$  den horisontella sträckan mellan  $2 + iT$  och  $-\sqrt{T} + iT$ ,  $\gamma_3(T)$  den vertikala sträcka mellan  $-\sqrt{T} + iT$  och  $-\sqrt{T} - iT$ , och  $\gamma_4(T)$  den horisontella sträckan mellan  $-\sqrt{T} - iT$  och  $2 - iT$ . Eftersom  $f'(z)/f(z)x^z$  är meromorf, med en pol av ordning ett vid  $z = 1/2$ , får vi (för säg  $T \geq 100$ ) att

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz + \int_{\gamma_2(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz + \int_{\gamma_3(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz + \int_{\gamma_4(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz \\ = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1/2} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} x^z \right). \end{aligned}$$

Eftersom  $f'(z)/f(z) = 1/(z - 1/2)$  är residyn lika med  $x^{1/2}$ .

Vi ser att  $\int_{\gamma_2(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz = O(x^2 T^{1/2}/T) = O(x^2 T^{-1/2})$ , och likaledes är  $\int_{\gamma_3(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz = O(x^2 T^{-1/2})$ . Vi ser även att  $\int_{\gamma_4(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz = O(T x^{-\sqrt{T}}) = O(T 2^{-\sqrt{T}})$ .

Residysatsen ger nu att

$$\int_{\gamma_1(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz = 2\pi i x^{1/2} + O(T 2^{-\sqrt{T}} + x^2 T^{-1/2})$$

och genom att låta  $T \rightarrow \infty$  ser vi att

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1(T)} \frac{f'(z)}{f(z)} x^z dz = 2\pi i \sqrt{x}.$$


---

- 
7. (4p) Finns det någon funktion, analytisk för  $|z| < 1$ , sådan att  $f(1/2) = 1/3$  samt  $f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2n+1}$  för  $n = 1, 2, 3, \dots$ ?
- 

Funktionen  $g(z) = z$  är analytisk för  $|z| < 1$ , och vi ser att  $f(\frac{1}{2n+1}) = g(\frac{1}{2n+1})$  för  $n = 1, 2, \dots$ . Eftersom  $\{\frac{1}{2n+1}\}_{n \geq 1}$  har en hopningspunkt vid  $z = 0$  ger entydighetsprincipen att  $f(z) = g(z)$  för alla  $z$  inuti enhetsdisken. Således existerar ingen sådan analytisk funktion.

---