



KTH Teknikvetenskap

**SF1691 Komplex analys**  
**Lösningsförslag till tentan den 16 augusti 2023**

---

DEL I

1. Finn alla holomorfa funktioner  $f(z) = f(x + iy)$  sådana att  $\operatorname{Re} f = \cos x$ .

*Lösning.* Sådana  $f$  måste uppfylla Cauchy-Riemanns ekvationer överallt i någon öppen mängd, så om  $f = u + iv$  får vi att  $u_y = 0 = -v_x$ , dvs  $v = c(y)$ , och vidare att  $u_x = -\sin x = v_y = c'(y)$  för någon funktion  $c$ . Detta kan inte vara uppfyllt i någon öppen mängd. Det finns alltså inga sådana holomorfa funktioner.  $\square$

**Svar:** Finns inga.

2. Beräkna integralen  $\int_{\gamma} \frac{3z^2}{z^3 + 1} dz$  där  $\gamma$  är cirkeln  $C[2i, 2]$  (dvs cirkeln med medelpunkt i  $2i$  och radie 2) genomlöst ett varv i positiv led.

*Lösning.* Enligt residysatsen är integralen lika med  $2\pi i$  multiplicerat med summan av residyerna innanför kurvan. Enda residyn innanför kurvan som är skild från noll är i punkten  $e^{i\pi/3}$  som är en enkel pol. Residyn där är 1 (beräknas t ex med bokens prop 9.14) så integralens värde är  $2\pi i$ .  $\square$

**Svar:**  $2\pi i$

3. Låt  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{3^n} z^{2n}$ . Bestäm konvergensradien för potensserien och beräkna integralen  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^7} dz$ , där  $\gamma$  är enhetscirkeln ett varv i positiv led.

*Lösning.* Sätt  $w = z^2$  och studera  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{3^n} w^n$  som med rotkriteriet har konvergensradie 3. Dvs för den ursprungliga serien gäller då  $|z^2| < 3$  dvs  $|z| < \sqrt{3}$ . Konvergensradien är alltså  $\sqrt{3}$ . Integralen är  $2\pi i$  multiplicerat med koefficienten framför  $z^6$ . Eftersom koefficienten framför  $z^6$  är 1 så är alltså integralen lika med  $2\pi i$ .

□

**Svar:** Konvergensradien är  $\sqrt{3}$  och integralen är lika med  $2\pi i$

## DEL II

4. Bevisa att holomorfa funktioner uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.

*Lösning.* Se läroboken



**Svar:**

5. Formulera och bevisa Cauchys integralformel.

*Lösning.* Se läroboken



**Svar:**

---

DEL III

6. Bestäm antalet nollställen i högra halvplanet,  $\operatorname{Re} z > 0$ , till  $p(z) = z^4 + 2z^2 + z + 1$ .

*Lösning.* Vi använder argumentprincipen. Låt  $\gamma$  vara kurvan som består av imaginära axeln från punkten  $iR$  till  $-iR$  för något stort reellt tal  $R$  följt av halvcirkelbågen  $z = Re^{it}$  för  $t$  från  $-\pi/2$  till  $\pi/2$ . Vi studerar hur många varv  $p(\gamma)$  går runt origo. Först ser vi att kurvan  $p(i\omega)$  när  $\omega$  går från  $R$  till  $-R$  inte går runt origo, den börjar och slutar i långt till höger vid reella axeln utan att gå runt origo. Sen ser vi att  $p(Re^{it}) \approx R^4 e^{i4t}$  går 2 varv runt origo. Summa två varv, så antalet nollställen i högra halvplanet är 2.  $\square$

**Svar:** 2

7. Låt  $f(z) = \frac{2i}{z^2 + 1}$ .

- (a) Vilken typ av singularitet har  $f$  i punkten  $i$ ?
- (b) Beräkna residyn av  $f$  i punkten  $i$ .
- (c) Utveckla  $f$  i en Laurentserie runt  $i$  som konvergerar då  $|z - i| > 2$ .

*Lösning.* Vi ser att  $f(z) = \frac{2i}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i}$  så singulariteten är en pol av ordning 1 och residyn är 1. Sen använder vi partialbråksuppdelning och summan av en geometrisk serie mm och får:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} = \frac{1}{z - i} - \frac{1}{(z - i)(1 + \frac{2i}{z - i})} \\ &= \frac{1}{z - i} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2i)^n (z - i)^{-n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2i)^n (z - i)^{-n-1} \end{aligned}$$

då  $|z - i| > 2$ .

□

**Svar:** a. En pol av ordning 1. b. Residyn r 1. c.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2i)^n (z - i)^{-n-1}$

8. Låt  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-1)^k$  där koefficienterna  $c_k$  är komplexa tal och Laurentserien konvergerar i ringområdet  $1 < |z-1| < 3$ . Beräkna integralen  $\int_{\gamma} z^2 f(z) dz$  där  $\gamma$  är cirkeln  $|z-1| = 2$  genomlöst ett varv i positiv led.

*Lösning.* Eftersom konvergensen är likformig får vi integrera term för term och får

$$\int_{\gamma} z^2 f(z) dz = \int_{\gamma} z^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-1)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\gamma} z^2 (z-1)^k dz.$$

För alla icke-negativa  $k$  är integralerna till höger ovan noll pga Cauchys integralsats. För negativa  $k$  kan vi använda Cauchys integralformel (inklusive varianten för derivator) och få att integralerna är noll för alla  $k$  mindre än  $-3$ , integralen för  $k = -1$  är  $2\pi i$ , integralen för  $k = -2$  är  $4\pi i$  och integralen för  $k = -3$  är  $2\pi i$ . Sammantaget får vi därför att

$$\int_{\gamma} z^2 f(z) dz = 2\pi i(c_{-1} + 2c_{-2} + c_{-3}).$$

□

**Svar:**  $2\pi i(c_{-1} + 2c_{-2} + c_{-3})$ .

---