



KTH Teknikvetenskap

SF1691 Komplex analys
Lösningsförslag till tentan den 5 juni 2023

DEL I

1. Låt f vara en gren av $z^{1/2}$ som är holomorf i vänstra halvplanet, $\operatorname{Re} z < 0$. Beräkna $f(-1 + i\sqrt{3})$ och $f'(-1 + i\sqrt{3})$. Svar ska ges på formen $a + ib$.

Lösning. Vi kan ta $f(z) = \exp(\frac{1}{2}(\ln |z| + i \arg z))$ där $0 < \arg z < 2\pi$. Då är

$$f(-1 + i\sqrt{3}) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 2 + i\frac{2\pi}{3})\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Vidare är

$$f'(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2f(-1 + i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{6}}{8}.$$

□

Svar: $f(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ och $f'(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{6}}{8}$.

2. Beräkna integralen $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 + 1} dz$ där γ är cirkeln $C[2i, 2]$ (dvs cirkeln med medelpunkt i $2i$ och radie 2) genomlöst ett varv i positiv led. Svaret får inte innehålla namn på trigonometriska funktioner.

Lösning. Vi får direkt med Cauchys integralformel att integralens värde är $\pi \cos i$ vilket också kan skrivas $\pi \frac{e+e^{-1}}{2}$ eller $\pi \cosh 1$. $\square$

Svar: $\pi(e + e^{-1})/2$

3. För vilka punkter z_0 i komplexa planet gäller att man kan utveckla $f(z) = \tan z$ i en konvergent potensserie centrerad i z_0 ? Om $z_0 = \pi$ är en sådan punkt, bestäm de första två nollskilda termerna i potensserien centrerad där och bestäm också konvergensradien.

Lösning. Potensserieutveckling funkar runt alla punkter z_0 där f är holomorf, dvs alla $z_0 \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, n heltal. Punkten $z_0 = \pi$ fungerar alltså och konvergensradien för serien som är centrerad där blir avståndet till närmsta singularitet dvs $\pi/2$. Genom att derivera eller ansätta koefficienter i en potensserie och använda de kända serierna

$$\sin z = -(z - \pi) + \frac{(z - \pi)^3}{3!} - \dots \quad \text{och} \quad \cos z = -1 + \frac{(z - \pi)^2}{2!} - \dots$$

så får vi

$$\tan z = z - \pi + \frac{1}{3}(z - \pi)^3 + \dots$$

□

Svar: Alla $z_0 \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, n heltal

Serien vid π har konvergensradie $\pi/2$

$$\tan z = z - \pi + \frac{1}{3}(z - \pi)^3 + \dots$$

DEL II

4. Låt Ω vara en enkelt sammanhängande region i komplexa planet. Bevisa, t ex med hjälp av Greens formel, följande version av Cauchys integralsats: Om $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ är holomorf och γ är en positivt orienterad enkel sluten styckvis slät kurva i Ω , så är $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

Lösning. Om $f = u + iv$ är holomorf så uppfylls Cauchy-Riemanns ekvationer: $u_x = v_y$ och $u_y = -v_x$. Dessutom är f oändligt deriverbar. Vi kan alltså använda Greens formel. Om D är området innanför kurvan γ får vi med hjälp av Greens formel och Cauchy-Riemanns ekvationer att

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Svar: Se lösningen

5. Formulera och bevisa Liouvilles sats.

Lösning. Se bokens kapitel 5.3



Svar:

DEL III

6. Funktionen $f(z) = \frac{z}{\exp(z) - 1}$ kan utvecklas i en Laurentserie på formen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ som konvergerar nära origo. Talen B_n kallas Bernoullital.
- (a) Avgör vilken typ av singularitet f har i origo.
 - (b) Bestäm konvergensområdet för serien.
 - (c) Beräkna de första fyra Bernoullitalen, dvs B_0 , B_1 , B_2 och B_3 .

Lösning. Eftersom Laurentserien saknar termer med negativa potenser av z så följer att singulariteten i origo är hävbar. Närmsta singularitet sett från origo är punkten $z = 2\pi i$ så det följer att konvergensområdet för serien är cirkelskivan $D[0, 2\pi]$, dvs cirkelskivan runt origo med radie 2π , och serien konvergerar till f på ringområdet $0 < |z| < 2\pi$. Genom att använda den givna Laurentserien, som är en potensserie, tillsammans med potensserien för $\exp(z)$, får vi sambandet

$$z = (B_0 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \dots)(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots)$$

ur vilket vi lätt kan beräkna Bernoullitalen. Vi får

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0.$$

□

Svar: (a) Hävbar

- (b) Serien konvergerar på $D[0, 2\pi]$ och konvergerar till f på ringområdet $0 < |z| < 2\pi$
- (c) $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$.

7. Beräkna med residykalkyl den reella integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Förklara ordentligt alla steg i lösningen.

Lösning. Eftersom $\cos 2x = \operatorname{Re} e^{i2x}$ och integranden är jämn gäller att

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2x)}{(x^2 + 1)^2} dx = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i2x}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Eftersom integranden vidare kan uppskattas med $1/(1 + x^2)$ som är integrerbar på $\mathbb{R}$ och integralen längs en halvcirkel i övre halvplanet med start i R och slut i $-R$ går mot 0 enligt ML-olikheten när $R \rightarrow \infty$ så får vi på vanligt sätt att

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{\gamma_R} \frac{\exp(i2z)}{(z^2 + 1)^2} dz = \operatorname{Re} \frac{1}{2} (2\pi i) \operatorname{Res}_{z=i} \left(\frac{\exp(i2z)}{(z^2 + 1)^2} \right) = \frac{3\pi e^{-2}}{4}$$

där vi har använt den vanliga metoden för att beräkna residyn i den pol av ordning 2 som integranden har i punkten i innanför kurvan γ_R som består av intervallet från $-R$ till R på x -axeln följt av den halvcirkel i övre halvplanet som nämnts ovan.

□

Svar: $3\pi e^{-2}/4$.

8. Formulera och bevisa Weierstrass M-test för likformig konvergens.

Lösning. Se läroboken.



Svar:
