



KTH Teknikvetenskap

**SF1691 Komplex analys**  
**Lösningsförslag till tentamen 2022-08-17**

---

DEL I

1. Bestäm alla hela funktioner  $f$  som uppfyller att  $\operatorname{Re} f = x^2$ .

*Lösning.* Om  $f = u + iv$  är hel och  $u = x^2$  så ger Cauchy-Riemanns ekvationer att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \implies v = 2xy + C(x)$$

och vidare

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

som inte kan vara uppfyllt i någon öppen mängd. Det finns alltså inga sådana funktioner  $\square$

**Svar:** Det finns inga sådana funktioner.

2. Går det att utveckla  $f(z) = \frac{z}{z^3 - 1}$  i en konvergent potensserie kring  $z = -1$ ? Om det går, förklara varför och finn de tre första nollskilda termerna i denna potensserie, samt bestäm konvergensradien. Om det inte går, förklara varför det inte går.

*Lösning.* Eftersom  $f$  är komplext deriverbar (följer av deriveringsreglerna) i en omgivning av  $-1$  så går det att utveckla  $f$  i en konvergent potensserie centrerad i  $-1$ . Konvergensradien är avståndet till närmsta singularitet, som är  $e^{i\pi/3}$ , så konvergensradien är 1. De första termerna i serien fås genom derivering osv och eftersom  $f(-1) = 1/2$ ,  $f'(-1) = 1/4$  och  $f''(-1) = -3/4$  så får vi att

$$\frac{z}{z^3 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z + 1) - \frac{3}{8}(z + 1)^2 + \dots$$

□

**Svar:** Ja,  $R = 1$ , serien börjar  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z + 1) - \frac{3}{8}(z + 1)^2 + \dots$

3. Låt  $f$  vara den gren av  $z^{1/3}$  som är definierad i hela komplexa planet utom i origo och längs negativa reella axeln och som uppfyller att  $f(-8i) = 2i$ . Bestäm  $f(125)$ .

*Lösning.* Vi använder definitionen av komplexa potenser och får

$$z^{1/3} = \exp\left(\frac{1}{3} \log z\right) = \exp\left(\frac{1}{3}(\ln |z| + i \arg z)\right)$$

och därmed

$$(8i)^{1/3} = \exp\left(\frac{1}{3}\left(\ln 8 + i\left(-\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)\right)\right)$$

där vi ska välja  $n = 1$  för att resultatet ska bli  $2i$ . För vår gren  $f$  gäller alltså att

$$f(125) = \exp\left(\frac{1}{3}(\ln 125 + i2\pi)\right) = -\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

□

**Svar:**  $f(125) = -\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}$

## DEL II

4. Förklara vad som menas med att  $f$  har en pol av ordning 2 i punkten  $z_0$  och visa att residyn i en sådan pol kan beräknas genom  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz}(z - z_0)f(z)$ .

*Lösning.* Om  $f$  är holomorf i en punkterad omgivning av  $z_0$  och vi kan skriva  $f(z) = g(z)/(z - z_0)^2$  för någon funktion  $g$  som är holomorf och nollskild i en omgivning av  $z_0$  så sägs  $f$  ha en pol av ordning 2 i  $z_0$  (kan också definieras via t ex laurentserien).

Om  $f$  har en pol av ordning 2 i  $z_0$  så gäller att vi kan Laurentseriutveckla

$$f(z) = c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \text{högre potenser}$$

och därmed är

$$(z - z_0)^2 f(z) = c_{-2} + c_{-1}(z - z_0) + c_0(z - z_0)^2 + c_1(z - z_0)^3 + \text{högre potenser}$$

och om vi deriverar detta term för term (vilket är tillåtet) får vi

$$\frac{d}{dz}(z - z_0)^2 f(z) = c_{-1} + c_0 2(z - z_0) + c_1 3(z - z_0)^2 + \text{högre potenser}$$

och om vi nu tar gränsvärdet av detta när  $z$  går mot  $z_0$  försvinner alla termer som innehåller  $z - z_0$  och vi får

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz}(z - z_0)^2 f(z) = c_{-1} = \text{res}_{z_0}(f(z)).$$

□

**Svar:** Se lösningen

5. Beräkna, bl a genom att hänvisa till lämpliga satser, integralen  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z + i \cos z}{z^2 + 2iz - 1} dz$  för varje enkel sluten slät positivt orienterad kurva  $\gamma$  som inte passerar igenom punkten  $-i$ . Svar ska förenklas så långt som möjligt och får inte innehålla namn på trigonometriska funktioner.

*Lösning.* Eftersom  $z^2 + 2iz - 1 = (z + i)^2$  får vi att integralen är 0 om  $-i$  inte ligger innanför  $\gamma$ . Detta på grund av Cauchys integralsats eftersom integranden då är holomorf på och innanför kurvan. Om däremot  $-i$  ligger innanför  $\gamma$  så kan vi använda Cauchys integralformel för derivatan. Vi får att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z + i \cos z}{z^2 + 2iz - 1} dz = \frac{d}{dz}(\sin z + i \cos z)|_{z=-i} = \cos(-i) - \sin(-i) = \frac{1}{e}$$

□

**Svar:**  $1/e$

## DEL III

6. Betrakta funktionen  $f$  som ges av  $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^2}$ .
- (a) Utveckla  $f$  i en Laurentserie som är konvergent i en punkterad omgivning av  $z = 1$ .
  - (b) Bestäm konvergensområdet för denna Laurentserie.
  - (c) Avgör vilken typ av singularitet  $f$  har i punkten  $z = 1$ .
  - (d) Beräkna residyn av  $f$  i  $z = 1$ .
  - (e) Beräkna integralen  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z), dz$  där  $\gamma$  är cirkeln med radie  $1/20$  och centrum i  $z = 1$ , genomlöst ett varv i positiv led.

*Lösning.* Vi har att  $\frac{1}{z^3 - z^2} = \frac{1}{z - 1} \cdot \frac{1}{z^2}$  och vidare att

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz} \frac{1}{z} = -\frac{d}{dz} \frac{1}{1 + z - 1} = -\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z - 1)^{n-1}$$

och därför är den sökta Laurentserien

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z - 1)^{n-2}$$

Konvergensområdet är  $0 < |z - 1| < 1$  eftersom närmsta annan singularitet är i punkten  $z = 0$ . Vi ser på Laurentserien att  $f$  har en pol av ordning 1 i punkten  $z = 1$  och residyn är koefficienten framför  $(z - 1)^{-1}$  dvs 1, vilket också integralen är.

□

- Svar:** a.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (z - 1)^{n-2}$   
 b.  $0 < |z - 1| < 1$   
 c. Pol av ordning 1  
 d. 1  
 e. 1

7. Beräkna med hjälp av residykalkyl den reella integralen  $\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt$ .

*Lösning.* Integranden är realdelen av  $e^{e^{it}}$  så med  $z = e^{it}$  och  $dz = ie^{it}dt$  får vi att

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = \operatorname{Re} \int_{\gamma} \frac{\exp(z)}{iz} dz$$

där  $\gamma$  är enhetscirkeln i komplexa planet tagen ett varv i positiv led. Den sista integralen räknar vi ut med residysatsen. Vi får

$$\int_{\gamma} \frac{\exp(z)}{iz} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \left( \frac{\exp(z)}{iz} \right) = 2\pi$$

och realdelen av detta är  $2\pi$  som är svaret.

□

**Svar:**  $2\pi$

8. Bevisa Cauchys integralformel.

*Lösning.* Se boken



**Svar:**

---