



KTH Teknikvetenskap

SF1691 Komplex analys
Lösningsförslag till tentamen 2022-06-07

DEL I

1. Finn alla komplexa tal z som löser ekvationen $z^3 = -64$. Svar ska ges på den rektangulära formen $a + ib$.

Lösning. Vi använder polär form, $z = re^{it}$ och $-64 = 64e^{i(\pi+n2\pi)}$, och får att

$$z^3 = -64 \iff r^3 e^{i3t} = 64e^{i(\pi+n2\pi)}$$

vilket ger att $r = 4$ och $t = \pi/3 + n2\pi/3$, där n är ett godtyckligt heltal. På rektangulär form ger detta lösningarna

$$z_0 = 2 + i2\sqrt{3}$$

$$z_1 = -4$$

$$z_2 = 2 - i2\sqrt{3}$$

□

Svar: Lösningarna är -4 och $2 \pm i2\sqrt{3}$

2. Låt f vara den gren av den komplexa logaritmen $\log z$, definierad i hela komplexa planet utom i origo och längs negativa reella axeln, som uppfyller att $f(-i) = i3\pi/2$. Bestäm $f(e)$ och $f'(e)$.

Lösning. Vi har att $\log z = \ln |z| + i \arg z$ där argumentet, för att $\log(-i) = i3\pi/2$, måste väljas så att argumentet längs negativa imaginära axeln är $3\pi/2$. Det betyder att argumentet längs positiva reella axeln är 2π . Därför får vi

$$f(e) = \ln |e| + i \arg e = 1 + 2\pi i.$$

Vi deriverar och får $f'(z) = 1/z$ så

$$f'(e) = 1/e.$$

□

Svar: $f(e) = 1 + 2\pi i$ och $f'(e) = 1/e$

3. Bestäm konvergensradien för potensserien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{3^n} z^{2n}$ och beräkna integralen

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^3} dz \text{ där } \gamma \text{ är enhetscirkeln ett varv moturs.}$$

Lösning. Med kvot- eller rottestet får vi konvergensradien till $\sqrt{3/e}$ och med integralformlerna för koefficienterna i en potensserie får vi att integralens värde är $2\pi i$ multiplicerat med koefficienten framför z^2 , dvs integralens värde är $2\pi i e/3$

□

Svar: Konvergensradien är $\sqrt{3/e}$ och integralens värde är $2\pi i e/3$

DEL II

4. Visa att holomorfa funktioner uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer.

Lösning. Se boken!



Svar: Se boken

5. Beräkna, bl a genom att hänvisa till lämpliga satser, integralen $I = \int_{\gamma} \frac{\cos z - i \sin z}{z^2 - 2iz - 1} dz$ för varje enkel sluten slät kurva γ som inte passerar igenom punkten i . Svar ska förenklas så långt som möjligt och får inte innehålla namn på trigonometriska funktioner.

Lösning. Nämnaren i integranden kan skrivas $(z - i)^2$, så vi ser direkt med hjälp av Cauchys integralformel att integralens värde är 0 om punkten i ligger utanför kurvan γ . Integranden är ju då holomorf på och innanför kurvan. Om i istället ligger innanför kurvan får vi använda Cauchys integralformel för derivatan av en holomorf funktion (eller residysatsen). Vi får, om kurvan är i positiv led,

$$I = \int_{\gamma} \frac{\cos z - i \sin z}{(z - i)^2} dz = 2\pi i(-\sin i - i \cos i) = 2\pi e.$$

Om kurvan är negativt orienterad blir det ett minustecken framför.

□

Svar: Om i ligger utanför kurvan är $I = 0$. Om i ligger innanför kurvan är $I = 2\pi e$ om kurvan är positivt orienterad och $I = -2\pi e$ om kurvan är negativt orienterad.

DEL III

6. Betrakta funktionen f som ges av $f(z) = \frac{1}{z^3 + z^2}$.
- (a) Utveckla f i en Laurentserie som är konvergent i en punkterad omgivning av origo.
 - (b) Bestäm konvergensområdet för denna Laurentserie.
 - (c) Avgör vilken typ av singularitet f har i origo.
 - (d) Beräkna residyn av f i origo.
 - (e) Beräkna integralen $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z), dz$ där γ är cirkeln med radie $1/20$ och centrum i origo, genomlöst ett varv i positiv led.

Lösning. Med hjälp av geometrisk serie har vi att

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-2},$$

som är den sökta Laurentserien. Vi ser med hjälp av serien att f har en pol av ordning 2 i origo. Konvergensområdet är $0 < |z| < 1$ eftersom närmsta singularitet utom origo är -1 . Vi ser också med hjälp av serien att residyn av f i origo är -1 , eftersom residyn är koefficienten framför $1/z$ i Laurentserien. Den givna integralen ger också residyn av f i origo så integralens värde är -1 .

□

Svar: Se lösningen.

7. Beräkna med hjälp av residykalkyl den reella integralen $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{2 - \sin t} dt$.

Lösning. Vi sätter $e^{it} = z$ med $ie^{it} dt = dz$ dvs $dt = dz/iz$ och får

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{2 - \sin t} dt = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2(4iz - z^2 + 1)} dz$$

där γ är enhetscirkeln ett varv i positiv led. Enligt residysatsen är den sista integralen nu lika med $2\pi i$ multiplicerat med summan av residyerna innanför kurvan. Det finns två singulariteter innanför kurvan, en dubbelpol i origo och en enkel pol i $i(2 - \sqrt{3})$. Med de vanliga reglerna för beräkning av residyer (och hårt arbete) fås residyn i origo till $-4i$ och residyn i $i(2 - \sqrt{3})$ fås till $i2\sqrt{3}$. Sammantaget får vi att

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{2 - \sin t} dt = \frac{1}{2} 2\pi i (-4i + i2\sqrt{3}) = 2\pi(2 - \sqrt{3})$$

□

Svar: $2\pi(2 - \sqrt{3})$

8. Bestäm alla hela funktioner f som för alla z uppfyller att $|f(z)| \leq \ln(1 + z\bar{z})$.

Lösning. Låt z vara en godtycklig punkt i $\mathbb{C}$ och låt f uppfylla villkoren i uppgiften. Då gäller för varje positivt tal R enligt Cauchys integralformel för derivatan av en holomorf funktion och ML-olikheten att

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C[z,R]} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{\max_{w \in C[z,R]} |f(w)|}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R \leq \frac{\ln(1 + |w|^2)}{R} \leq \frac{\ln(1 + (|z| + R)^2)}{R} \rightarrow 0$$

när $R \rightarrow \infty$. Så $f'(z) = 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Det följer att f är konstant. Eftersom $|f(0)| \leq \ln 1 = 0$ så är $f(0) = 0$ och det följer att $f(z) = 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$

□